

**LAPORAN AKHIR  
PENELITIAN PENGUATAN PROGRAM STUDI**

**Simulasi Perambatan Tsunami menggunakan  
Persamaan Gelombang Air-Dangkal**

Oleh:  
Mohammad Jamhuri, M.Si  
NIP. 19810502 200501 1004



**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALIKI  
MALANG**

2014

# Pengesahan

## Laporan Penelitian Penguatan Program Studi

1. Nama Peneliti : Mohammad Jamhuri, M.Si
2. NIP : 19810502 200501 1004
3. Pangkat/Golongan : Lektor/IIIc
5. Bidang Ilmu : Matematika Terapan
6. Judul Penelitian Mahasiswa :
  1. Penurunan Persamaan Air-Dangkal
  2. Solusi Numerik Persamaan Air-Dangkal dengan Metode Volume Hingga
7. Jurusan : Matematika
8. Lama Kegiatan : 6 Bulan
9. Biaya Yang di Usulkan : 10 Jt

Malang, 31 Oktober 2014

Disahkan Oleh

Dekan

Fakultas Sains dan Teknologi

Peneliti,

Dr. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si

NIP. 19710919 200003 2 001

Mohammad Jamhuri, M.Si

NIP. 19810502 200501 1004

Ketua LP2M UIN Maulana Malik Ibrahim

Dr. Hj. Mufidah Ch., M.Ag

NIP. 19600910 198903 2001

# Contents

<b>Pengesahan</b>	<b>ii</b>
<b>Abstrak</b>	<b>vi</b>
<b>Kata Pengantar</b>	<b>vii</b>
<b>1 BAB I</b>	
<b>Pendahuluan</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Perumusan Masalah . . . . .	2
1.3 Tujuan Penelitian . . . . .	3
1.4 Batasan Masalah . . . . .	3
<b>2 BAB II</b>	
<b>Tinjauan Pustaka</b>	<b>4</b>
2.1 Persamaan Kontinuitas . . . . .	4
2.2 Persamaan Momentum . . . . .	6
2.3 Kondisi Batas . . . . .	11
2.3.1 Kondisi Kinematik pada $z = \eta(x, y, t)$ (permukaan bebas) . . . .	11
2.3.2 Kondisi Dinamik pada $z = \eta(x, y, t)$ (permukaan bebas) . . . .	12
2.3.3 Kondisi Kinematik pada $z = -h(x, y)$ (dasar saluran) . . . . .	13
2.4 Metode Volume Hingga . . . . .	13

<b>3</b>	<b>BAB III</b>	
	<b>Metode Penelitian</b>	<b>17</b>
<b>4</b>	<b>BAB IV</b>	
	<b>Hasil dan Pembahasan</b>	<b>18</b>
4.1	Penurunan Persamaan Gelombang Air-Dangkal . . . . .	19
4.1.1	Persamaan Pengatur . . . . .	19
4.1.2	Persamaan kontinuitas . . . . .	20
4.1.3	Persamaan momentum dalam arah- $x$ . . . . .	21
4.1.3.1	Ruas kiri . . . . .	22
4.1.3.2	Ruas kanan . . . . .	23
4.1.4	Persamaan momentum dalam arah- $y$ . . . . .	24
4.1.4.1	Ruas kiri . . . . .	24
4.1.4.2	Ruas kanan . . . . .	25
4.2	Model Gelombang Air-Dangkal . . . . .	26
4.3	Pelinieran Model SWE . . . . .	26
4.4	Syarat Batas Transparan dan Syarat Batas Serap bagi SWE Linier 1D	28
4.4.1	Metode Lax . . . . .	29
4.4.2	Metode Godunov . . . . .	30
4.5	Syarat Batas Serap bagi SWE Linier 2D . . . . .	33
4.5.1	Metode Lax . . . . .	34
4.5.2	Metode Godunov . . . . .	35
4.5.3	Plane Wave dan Circular Wave . . . . .	39
4.5.4	Simulasi Syarat Batas Serap . . . . .	40
4.5.5	Pengamatan Hasil Simulasi . . . . .	43

4.6	Aplikasi pada Tsunami . . . . .	45
4.7	Solusi Persamaan Air Dangkal . . . . .	46
4.7.1	Solusi numerik persamaan gelombang air dangkal . . . . .	46
4.7.2	Pengintegralan dan pendiskritan . . . . .	47
4.7.3	Pendiskritan turunan terhadap waktu . . . . .	48
4.7.4	Simulasi 1 . . . . .	48
4.7.5	Simulasi 2 . . . . .	49
<b>5</b>	<b>BAB V</b>	
	<b>Penutup</b>	<b>53</b>
5.1	Kesimpulan . . . . .	53
5.2	Saran . . . . .	54
	<b>Bibliography</b>	<b>55</b>
	<b>Log-Book Penelitian</b>	<b>57</b>
	<b>Kode Program</b>	<b>59</b>

# Abstrak

Dalam penelitian ini, akan dilakukan simulasi perambatan gelombang tsunami menggunakan persamaan gelombang air dangkal (*shallow water equation*) yang biasa disingkat menjadi SWE. Di sini juga akan dibahas penurunan persamaan gelombang air dangkal berdasarkan prinsip konservasi massa dan prinsip konservasi momentum yang berlaku pada aliran air yang memenuhi definisi perairan dangkal. Selanjutnya model SWE yang diperoleh akan diselesaikan dengan menggunakan metode volume hingga skema implisit.

# Kata Pengantar

Atas berkat rahmat dan nikmat Allah SWT, kami bersyukur dapat menyelesaikan laporan penelitian ini dengan baik. Meskipun demikian, kami menyadari akan keterbatasan dan kekurangan dalam penelitian ini, dan oleh karena itu tak lupa kami mengharap komentar dan kritikan dari pembaca untuk melengkapi dan menyempurnakan penelitian ini.

Laporan penelitian ini dapat kami selesaikan pula berkat bantuan dari beberapa pihak, dan oleh karena itu kami mengucapkan terima kasih pada

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, selaku Rektor UIN Maliki Malang.
2. Dr. Hj. Mufidah, M.Ag, selaku ketua LP2M UIN Maliki Malang,
3. Dr. Hj. Bayyinatul Muchtarrohmah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maliki Malang.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maliki Malang.
5. Beberapa pihak yang tidak dapat kami sebutkan semuanya.

Kami berharap bahwa hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai rujukan dalam pembelajaran matematika atau sebagai referensi dalam penelitian.

Malang, 31 Oktober 2014  
Ketua Peneliti,

Mohammad Jamhuri, M.Si  
NIP. 19810502 200501 1 004

# BAB I

## Pendahuluan

### 1.1 Latar Belakang

Pada hakikatnya semua benda yang ada di alam ini dapat disebut sebagai fluida, baik itu benda padat, cair, ataupun gas. Fluida sendiri dibedakan menjadi dua berdasarkan tingkat kekentalannya, yaitu fluida tak kental (benda cair dan gas) dan fluida kental (benda padat). Untuk fluida tak kental dibedakan lagi berdasarkan kemampuannya, sebagai fluida yang tak mampu mampat (air) dan fluida yang mampu mampat (gas). Pergerakan partikel-partikel yang terjadi pada benda-benda tersebut disebut sebagai dinamika fluida.

Berbagai fenomena alam banyak yang terkait dengan gelombang, diantaranya adalah bunyi, cahaya, pergerakan air laut, aliran air sungai, riak pada air kolam, dan contoh-contoh lain yang banyak terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Jika sekumpulan air dikenakan gaya, maka akan timbul gelombang yang disebut sebagai gelombang permukaan. Salah satu jenis gelombang yang banyak dikaji adalah gelombang tsunami, yang mana gelombang tsunami ini memiliki periode gelombang yang sangat besar dan gelombangnya tidak mudah hilang ataupun tereduksi [2].

Gelombang tsunami dapat dibangkitkan oleh berbagai macam sumber, diantaranya adalah gempa yang terjadi pada perairan dangkal, letusan gunung berapi, tanah longsor, jatuhnya kapal selam, dan bisa juga disebabkan oleh ledakan. Setiap sumber yang membangkitkan gelombang tsunami tersebut memiliki cara sendiri-sendiri, dan karakteristiknya bergantung pada mekanisme masing-masing. Gelombang tsunami yang perjalanannya sangat panjang dan dapat melintasi beberapa samudra umumnya dibangkitkan oleh gempa tektonik yang terjadi di dasar lautan. Tetapi, gelombang besar juga dapat dibangkitkan oleh mekanisme pembangkit lainnya seperti ledakan bom atom, jatuhnya meteor, dsb [2].



Persamaan gelombang air dangkal (*shallow water equation*) merupakan salah satu model gelombang permukaan yang banyak digunakan untuk mensimulasikan penyebaran gelombang permukaan yang berjalan dua arah dalam ruang 1D dan ke segala arah untuk ruang 2D [5]. Persamaan air dangkal dapat digunakan jika panjang gelombang  $\lambda$  dan tipikal kedalaman  $d_0$  memenuhi  $d_0/\lambda < 1$  [12].

Pada perairan yang sangat dangkal, kecepatan vertikal dalam air dapat diabaikan dan gelombangnya dinamakan sebagai gelombang panjang, profile dari gelombang dan penyebarannya dapat di modelkan menggunakan pengintegralan secara vertikal terhadap persamaan dari prinsip konservasi massa dan persamaan dari prinsip konservasi momentum [7].

Karakteristik gelombang tsunami pada umumnya memiliki panjang gelombang jauh lebih besar jika dibandingkan dengan struktur kedalaman laut yang dilaluinya. Sebagai contoh Gelombang tsunami yang terjadi di samudra hindia pada tahun 2004 memiliki panjang gelombang lebih dari 200 km, sedangkan kedalaman samudra hindia sekitar 2 km s.d 5 km. Meskipun samudra hindia cukup dalam, tetapi karena gelombang yang melaluinya memiliki panjang gelombang yang jauh lebih besar, maka gelombang tsunami tersebut dapat dikategorikan sebagai gelombang air dangkal [13].

Dalam penelitian ini akan diturunkan persamaan gelombang air dangkal 2D untuk mensimulasikan bagaimana perambatan gelombang tsunami yang menyebar ke segala arah yang dibangkitkan oleh sebuah energi eksternal. Di dalam penurunan, peneliti akan menggunakan prinsip konservasi massa dan prinsip konservasi momentum. Selanjutnya model gelombang air dangkal yang diperoleh akan di selesaikan secara numerik menggunakan metode Lax-Wendroff.

## 1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimanakah pola penyebaran gelombang tsunami berdasarkan persamaan gelombang air dangkal.
2. Bagaimana prosedur numerik dalam menentukan solusi persamaan gelombang air dangkal menggunakan metode volume hingga.

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk:

1. Membuat model penyebaran gelombang tsunami menggunakan persamaan gelombang air dangkal.
2. Membuat prosedur numerik untuk penyelesaian model gelombang air dangkal yang di hasilkan.

## 1.4 Batasan Masalah

Berikut beberapa asumsi dasar yang digunakan dalam membuat batasan masalah:

1. Permasalahan ditinjau sebagai masalah dua dimensi.
2. Fluida diasumsikan ideal, yaitu tak termampatkan, tak kental, dan mempunyai kerapatan konstan.
3. Fluida diasumsikan sebagai fluida tak berotasi.
4. Fluida diasumsikan memiliki rapat massa yang homogen atau konstan.
5. Tekanan hidrostatiknya di asumsikan sangat kecil, sehingga dapat di abaikan.

# BAB II

## Tinjauan Pustaka

Tsunami dapat dimodelkan dengan menggunakan persamaan gelombang air-dangkal, karena Tsunami, meskipun terjadi pada perairan yang sangat dalam, sekitar 4-5 km, tetapi panjang gelombangnya sangat besar bila dibandingkan dengan kedalaman perairannya, yaitu antara 100-200 km. Persamaan gelombang air dangkal atau biasa disebut SWE (*shallow water equation*) telah banyak diturunkan oleh para peneliti terdahulu, diantaranya adalah [11, 7, 9, 6, 10, 8, 4].

Disini, kami akan menurunkan SWE dengan menggunakan persamaan kontinuitas dan persamaan-persamaan momentum. Persamaan kontinuitas dan persamaan-persamaan momentum tersebut biasa diistilahkan sebagai persamaan-persamaan pengatur dalam pemodelan gelombang.

Dalam bab ini, kami akan memberikan penjelasan darimana datangnya persamaan-persamaan pengatur tersebut .

### 2.1 Persamaan Kontinuitas

Pada subbbab ini, akan dibahas tentang penurunan persamaan kontinuitas berdasarkan prinsip konservasi massa terhadap elemen volume berbentuk kubus dengan sisi-sisi  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  dan  $\Delta z$  yang dilalui fluida (lihat Figure 2.1).

Pada elemen “volume” tersebut, perubahan massa rata-rata merupakan selisih antara massa rata-rata yang masuk dan yang keluar dengan asumsi tidak ada massa yang terbentuk atau hilang seperti halnya pada reaksi kimia.

Bila rapat massa fluida adalah  $\rho$  dan kita hanya memandang satu arah aliran, katakan dalam arah  $x$ , maka rata-rata massa yang masuk pada elemen volume per satuan

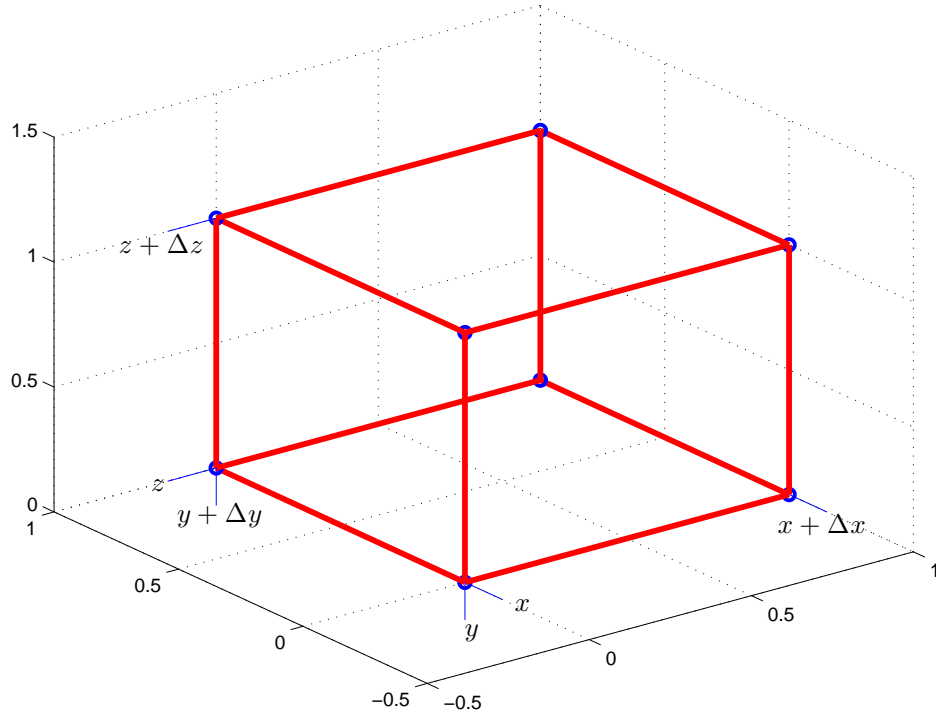


Figure 2.1: Ilustrasi Konservasi Massa

waktu (melintasi bidang  $x$ ) adalah  $(\rho u)|_x \Delta y \Delta z$ , dan rata-rata massa keluar melewati bidang  $x + \Delta x$  adalah  $(\rho u)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ . dengan  $u$  menyatakan komponen kecepatan dalam arah horizontal. Secara penuh vektor kecepatan dalam tiga dimensi dinotasikan dalam  $\mathbf{q} = (u, v, w)$ . Ekspresi yang sama dapat dituliskan untuk bidang lain yang dilintasi yaitu dalam arah  $y$  dan arah  $z$ . Oleh karena itu, kita memperoleh persamaan kesetimbangan massa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z = & [(\rho u)|_x - (\rho u)|_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z + [(\rho v)|_y - (\rho v)|_{y+\Delta y}] \Delta x \Delta z \\ & + [(\rho w)|_z - (\rho w)|_{z+\Delta z}] \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (2.1)$$

dengan membagi keseluruhan persamaan dengan volume  $\Delta x \Delta y \Delta z$  dan mengambil limit volume ini menuju ke nol, kita peroleh persamaan

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) menggambarkan rata-rata perubahan rapat massa pada suatu titik tetap sebagai hasil dari perubahan pada vektor kecepatan massa  $\rho \mathbf{q}$ .

Jika rapat massa fluida konstan, maka  $\partial \rho / \partial t = 0$  dan persamaan (2.2) menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) dikenal sebagai **persamaan kontinuitas**.

## 2.2 Persamaan Momentum

Seperti pada bagian sebelumnya, kita akan membahas persamaan gerak untuk tiga dimensi yang diturunkan berdasarkan kesetimbangan momentum tiga dimensi terhadap elemen “volume” berbentuk kubus dengan sisi-sisi  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  dan  $\Delta z$  yang dilalui fluida. Berdasarkan prinsip fisika yang terkait dengan momentum, hukum Newton II, kita tahu bahwa gaya total ( $F_{\text{total}}$ ) adalah perkalian massa ( $m$ ) dengan percepatan ( $a$ ), dapat dinotasikan sebagai

$$F_{\text{total}} = ma \quad (2.4)$$

dengan menggunakan definisi percepatan sebagai turunan dari kecepatan ( $v$ ) terhadap waktu, persamaan tersebut dapat dinotasikan

$$F_{\text{total}} = m \frac{dv}{dt} \quad (2.5)$$

apabila kita integralkan kedua ruas terhadap  $dt$  maka kita akan memperoleh bentuk

$$\int F_{\text{total}} dt = mv \quad (2.6)$$

Ruas kanan dari persamaan tersebut merupakan definisi fisis dari momentum ( $P_m$ ), yaitu perkalian dari massa dengan kecepatan, dapat dinotasikan sebagai

$$P_m = mv \quad (2.7)$$

dari persamaan (2.6) kita dapat merubahnya menjadi persamaan (2.8) berikut

$$F_{\text{total}} = \frac{d(mv)}{dt} \quad (2.8)$$

yang berarti bahwa gaya total ( $F_{\text{total}}$ ) adalah rata-rata perubahan momentum per-satuan waktu, kemudian dengan menggunakan hubungan antara massa dengan massa jenis yang dinotasikan sebagai

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.9)$$

dengan ( $\rho$ ) adalah massa jenis, dan ( $V$ ) adalah volume. Persamaan (2.9) dapat kita substitusikan ke persamaan (2.7) sehingga diperoleh

$$P_m = (\rho V) v \quad (2.10)$$

karena kita meninjau dalam tiga dimensi maka persamaan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk

$$P_m = (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) v \quad (2.11)$$

Untuk meninjau rata-rata perubahan momentum persatuan waktu kita dapat menotasikan

$$\frac{\partial}{\partial t} (P_m) = \frac{\partial}{\partial t} [(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) v] \quad (2.12)$$

Secara keseluruhan, kesetimbangan momentum pada elemen “volume” tersebut adalah:

<i>Rata – rata</i>		<i>Rata – rata</i>		<i>Rata – rata</i>		<i>Jumlah Gaya – gaya</i>
<i>Perubahan</i>	<i>=</i>	<i>Momentum</i>	<i>–</i>	<i>Momentum</i>	<i>+</i>	<i>yang Terjadi</i>
<i>Momentum</i>		<i>yang Masuk</i>		<i>yang Keluar</i>		<i>pada Sistem</i>

(2.13)

Neraca kesetimbangan tersebut merupakan persamaan vektor, dimana setiap komponennya menyatakan arah gerak fluida sesuai koordinatnya. Pada bagian ini, kita hanya menurunkan persamaan gerak untuk komponen  $x$  saja. Persamaan gerak untuk komponen lainnya dapat dilakukan dengan cara yang sama. Ilustrasi untuk neraca kesetimbangan momentum dapat dilihat pada Figure 2.2.

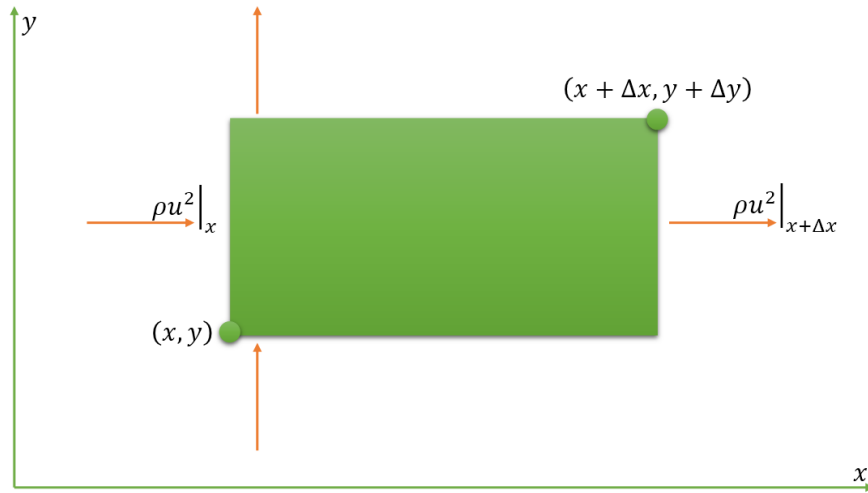


Figure 2.2: Ilustrasi Kesetimbangan Momentum

Fluida dengan rapat massa  $\rho$  dan bergerak dengan kecepatan  $u$  melintasi bidang  $x$  maka dalam selang satuan waktu terdapat sebanyak  $\rho V|_x = \rho u|_x \Delta y \Delta z$ . Momentum yang melintas bidang  $x$  sebesar  $\rho u|_x \Delta y \Delta z \cdot u|_x$ . Massa partikel yang melintasi bidang  $y$  adalah sebesar  $\rho v|_y \Delta x \Delta z$  dan momentum yang melintas bidang  $y$  adalah sebesar  $\rho v|_y \Delta x \Delta z \cdot u|_y$ . Sedangkan massa partikel yang melintasi bidang  $z$  adalah sebesar  $\rho w|_z \Delta x \Delta y$  dan momentum yang melintas bidang  $z$  adalah sebesar  $\rho w|_z \Delta x \Delta y \cdot u|_z$ .

Komponen yang mempengaruhi perubahan momentum adalah kontribusi massa, baik dari arah  $x$  maupun dari arah  $y$ . Komponen  $\rho u^2|_x \Delta y \Delta z$  menyatakan kontribusi massa

dari arah  $x$  dengan kecepatan sebesar  $u$  (arah  $x$ ),  $\rho v u|_y \Delta x$  menyatakan kontribusi massa dari arah  $y$  dengan kecepatan sebesar  $u$  (arah  $x$ ) dan  $\rho w u|_z \Delta x \Delta y$  menyatakan kontribusi massa dari arah  $z$  dengan kecepatan sebesar  $u$  (arah  $x$ ).

Dalam arah  $x$ , rata-rata momentum, elemen “volume” yang masuk melintasi bidang  $x$  adalah  $\rho u^2|_x \Delta y \Delta z$ , dan yang keluar melintasi bidang  $x + \Delta x$  adalah  $\rho u^2|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ . Rata-rata momentum yang masuk melintasi bidang  $y$  adalah  $\rho v u|_y \Delta x \Delta z$  dan yang keluar melintasi bidang  $y + \Delta y$  adalah  $\rho v u|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z$ . Rata-rata momentum yang masuk melintasi bidang  $z$  adalah  $\rho w u|_z \Delta x \Delta y$  dan yang keluar melintasi bidang  $z + \Delta z$  adalah  $\rho w u|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y$ . Momentum keseluruhan akibat konveksi pada komponen  $x$  adalah

$$\begin{aligned} \left[ \rho u^2|_x - \rho u^2|_{x+\Delta x} \right] \Delta y \Delta z &+ \left[ \rho v u|_y - \rho v u|_{y+\Delta y} \right] \Delta x \Delta z \\ &+ \left[ \rho w u|_z - \rho w u|_{z+\Delta z} \right] \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (2.14)$$

Faktor lain yang terlibat dalam neraca momentum disini adalah gaya-gaya yang terjadi pada elemen “volume”. Dari persamaan (2.8), kita tahu bahwa gaya total ( $F_{\text{total}}$ ) yang terjadi akan berpengaruh terhadap rata-rata perubahan momentum persatuan waktu. Gaya total ( $F_{\text{total}}$ ) ini terdiri atas gaya akibat tekanan fluida  $p$  dan gaya gravitasi akibat percepatan gravitasi  $g$ . Gaya lain yang dapat dipertimbangkan adalah gaya akibat tegangan geser, akan tetapi kita tidak akan melibatkan untuk fluida tak kental (*inviscid*). Tekanan fluida  $p$  didefinisikan sebagai gaya tekan yang diterima persatuan “luas” fluida dan dapat dinotasikan dalam bentuk

$$F_{\text{tekanan}} = P|_x \Delta y \Delta z \quad (2.15)$$

kemudian, dengan menggunakan hubungan gaya gravitasi dan percepatan gravitasi maka akan diperoleh persamaan sebagai berikut

$$F_{\text{gravitasi}} = \rho g_{(x)} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.16)$$

Resultan dari gaya-gaya ini dalam arah  $x$  adalah

$$\left[ p|_x - p|_{x+\Delta x} \right] \Delta y \Delta z + \rho g_{(x)} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.17)$$

$p|_x$  menyatakan tekanan pada bidang  $x$ , yang berkontribusi terhadap gaya tekan yang dialami oleh elemen “volume”, sedangkan  $g_{(x)}$  menyatakan percepatan akibat gravitasi dalam arah  $x$ , yang berkontribusi terhadap gaya gravitasi yang dialami oleh elemen “volume”.

Perubahan rata-rata momentum dalam elemen “volume”, yaitu  $\frac{\partial \rho u}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$ , dan hasil (2.17) akan kita substitusikan ke dalam neraca momentum. Persamaan yang diperoleh kemudian dibagi dengan  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , dan diambil limitnya masing-masing  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  dan  $\Delta z$  menuju nol, sehingga diperoleh persamaan gerak

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = - \left( \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} + \frac{\partial \rho w u}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_{(x)}$$

untuk komponen  $x$ . Dengan cara yang sama, neraca kesetimbangan momentum dari massa fluida terhadap arah  $y$  diperoleh

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} = - \left( \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho w v}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_{(y)}$$

dan

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} = - \left( \frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{\partial \rho v w}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_{(z)}$$

dalam arah  $z$ . Jika ketiga persamaan diatas dibagi kedua sisinya dengan  $\rho$  akan diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left( \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial v u}{\partial y} + \frac{\partial w u}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_{(x)} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \left( \frac{\partial u v}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial w v}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_{(y)} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \left( \frac{\partial u w}{\partial x} + \frac{\partial v w}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_{(z)} \quad (2.20)$$

Persamaan (2.18), (2.19), dan (2.20) dapat dituliskan menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (v u) + \frac{\partial}{\partial z} (w u) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u v) + \frac{\partial}{\partial y} (v^2) + \frac{\partial}{\partial z} (w v) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u w) + \frac{\partial}{\partial y} (v w) + \frac{\partial}{\partial z} (w^2) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \quad (2.23)$$

Sekarang perhatikan bahwa,

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (u, v, w) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi \quad (2.24)$$

dan

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2.25)$$

$$(g_{(x)}, g_{(y)}, g_{(z)}) = (0, 0, g) = g (0, 0, 1) = g \left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial z} \right) = g \nabla z \quad (2.26)$$



$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left[ \left( \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial wu}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial wv}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \right) \right] \\
&\Leftrightarrow \left( \frac{\partial u^2}{\partial x}, \frac{\partial uv}{\partial x}, \frac{\partial uw}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial vu}{\partial y}, \frac{\partial v^2}{\partial y}, \frac{\partial vw}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial wu}{\partial z}, \frac{\partial wv}{\partial z}, \frac{\partial w^2}{\partial z} \right) \\
&\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} (u^2, uv, uw) + \frac{\partial}{\partial y} (vu, v^2, vw) + \frac{\partial}{\partial z} (wu, wv, w^2) \\
&\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} u(u, v, w) + \frac{\partial}{\partial y} v(u, v, w) + \frac{\partial}{\partial z} w(u, v, w) = \frac{\partial}{\partial x} u\mathbf{q} + \frac{\partial}{\partial y} v\mathbf{q} + \frac{\partial}{\partial z} w\mathbf{q} \\
&\Leftrightarrow \nabla \cdot (u\mathbf{q}, v\mathbf{q}, w\mathbf{q}) = \nabla \cdot (u, v, w) \mathbf{q} = \nabla \cdot \mathbf{q}\mathbf{q} = (\nabla \cdot \mathbf{q}) \mathbf{q} = (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Komponen-komponen lain yang berhubungan dengan perkalian dari tiga kecepatan juga dapat dinyatakan sebagai perkalian dari vektor gradien  $\nabla$ , sehingga persamaan (2.18), (2.19) dan (2.20) dapat digabungkan menjadi satu persamaan vektor:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z \quad (2.28)$$

Berdasarkan definisi turunan total seperti yang telah dinyatakan pada (??), ruas kiri persamaan (2.28) dapat dinotasikan sebagai

$$\frac{D\mathbf{q}}{Dt} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + gz \right) + F \quad (2.29)$$

Persamaan (2.29) ini menyatakan bahwa elemen volume yang kecil ini bergerak dengan fluida dan dipercepat oleh adanya gaya-gaya yang bekerja padanya. Persamaan ini merupakan persamaan gerak yang diperoleh berdasarkan hukum kesetimbangan momentum secara umum. Suku terakhir  $F$  pada persamaan ini ditambahkan untuk mengakomodir momentum akibat gaya yang terjadi pada sistem sesuai dengan neraca kesetimbangan momentum pada (2.13). Gunakan  $F = 0$  untuk fluida yang mengalir tanpa hambatan.

Suku kedua pada ruas kiri (2.28) memenuhi hubungan

$$\mathbf{q} \times (\nabla \times \mathbf{q}) = -\mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} + \nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{q}|^2 \right) \quad (2.30)$$

dan untuk aliran irrotasional  $\nabla \times \mathbf{q} = 0$ , sehingga persamaan (2.28) dapat dituliskan menjadi

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{q}|^2 \right) = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + gz \right) \quad (2.31)$$

Karena diawal sudah kita definisikan  $\mathbf{q} = \nabla \phi$ , maka persamaan (2.31) dapat dituliskan

menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \nabla \left( \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \right) = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + gz \right) \quad (2.32)$$

Kemudian keluarkan operator  $\nabla$ , sehingga diperoleh

$$\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \quad (2.33)$$

Dengan mengintegrasikan persamaan (2.33) terhadap variabel  $x$  dan  $y$  dan  $z$ , diperoleh

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = r(t) \quad (2.34)$$

Persamaan (2.34) diatas dikenal sebagai persamaan Bernoulli dan  $r(t)$  merupakan fungsi sebarang dari  $t$  akibat integrasi yang dilakukan terhadap  $x$ ,  $y$ , dan  $z$ . Dengan menggabungkan  $r(t)$  dengan  $\phi$  berbentuk  $\phi - \int r(t) dt$ , maka diperoleh bentuk lain dari persamaan (2.34) diatas, yaitu

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad (2.35)$$

Secara fisis, persamaan (2.35) menyatakan aliran fluida berubah terhadap waktu yang dinyatakan oleh suku pertama. Suku kedua menyatakan aliran fluida dipengaruhi oleh perbedaan kecepatan. Suku ketiga menyatakan aliran fluida dipengaruhi oleh perbedaan tekanan dan suku keempat menyatakan aliran dipengaruhi oleh perbedaan ketinggian.

## 2.3 Kondisi Batas

Pada fluida terdapat tiga kondisi batas, yaitu batas kinematik dan dinamik pada permukaan bebas, serta kondisi batas kaku pada dasar saluran. Batas kinematik permukaan adalah batas dimana partikel yang ada di sepanjang permukaannya tidak berpindah. Batas dinamik permukaan adalah batas antara fluida dengan udara. Batas kaku pada dasar menyatakan keadaan dimana partikel yang ada pada permukaannya tidak berpindah secara vertikal.

### 2.3.1 Kondisi Kinematik pada $z = \eta(x, y, t)$ (permukaan bebas)

Kondisi batas kinematik diturunkan berdasarkan ide dasar dari sifat kontinum fluida. Misalkan  $S$  merupakan permukaan bebas pada fluida dan bergerak bersama fluida.

Jika kita mengikuti setiap partikel permukaan, maka partikel tadi selalu membentuk permukaan dan fluida yang sebelumnya berada di  $S$  akan tetap berada di dalamnya. Secara matematis kita nyatakan permukaan  $S$  sebagai persamaan  $S(x, y, z, t) = 0$  secara implisit untuk suatu partikel di  $(x, y, z)$  dan partikel tersebut tetap pada permukaan dinyatakan sebagai

$$\frac{DS}{Dt} = 0$$

Nyatakan fungsi posisi untuk permukaan  $z = \eta(x, y, t)$  sebagai  $S(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0$ , dan turunan totalnya adalah

$$\frac{D}{Dt} S(x, y, z, t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [z - \eta(x, y, t)] + u \frac{\partial}{\partial x} [z - \eta(x, y, t)] + v \frac{\partial}{\partial y} [z - \eta(x, y, t)] + w \frac{\partial}{\partial z} [z - \eta(x, y, t)] = 0$$

yang memberikan

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial \eta}{\partial y} + w = 0$$

atau

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial \eta}{\partial y} + w \quad (2.36)$$

Sebagai catatan, kita asumsikan bahwa pengaruh aliran udara di atas air dapat diabaikan, sehingga kondisi batas kinematik tidak dipengaruhi oleh pemilihan  $S(x, y, z, t)$ .

### 2.3.2 Kondisi Dinamik pada $z = \eta(x, y, t)$ (permukaan bebas)

Kita asumsikan bahwa gerakan udara sepanjang permukaan bebas  $\eta(x, y, t)$  tidak ada atau diabaikan, maka tekanan pada udara adalah konstan. Kita tetapkan  $p = 0$  sebagai tekanan referensi. Selanjutnya kita gunakan persamaan Bernoulli sepanjang  $\eta$ , sehingga diperoleh

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta = 0 \quad (2.37)$$

Persamaan (2.37) diatas merupakan kondisi dinamik fluida yang berlaku sepanjang permukaan bebas  $\eta(x, t)$ .

### 2.3.3 Kondisi Kinematik pada $z = -h(x, y)$ (dasar saluran)

Nyatakan fungsi posisi untuk  $z = -h(x, y)$ , yaitu  $S(x, y, z) = z + h(x, y)$ . Turunan total dari  $S$ , tersebut yaitu

$$\frac{\partial}{\partial t} [z + h(x, y)] + u \frac{\partial}{\partial x} [z + h(x, y)] + v \frac{\partial}{\partial y} [z + h(x, y)] + w \frac{\partial}{\partial z} [z + h(x, y)] = 0$$

atau

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w = 0 \quad (2.38)$$

Secara fisis persamaan (2.38) diatas menyatakan bahwa tidak ada aliran yang tegak lurus dengan bidang dasar (menembus dasar kaku).

## 2.4 Metode Volume Hingga

Metode volume hingga yang dibahas pada subbab ini adalah untuk penyelesaian masalah persamaan differensial tipe hiperbolik 1D dan linier. Untuk sistem persamaan differensial 2D nonlinier akan dianalogikan dengan pembahasan metode volume hingga untuk 1D ini.

### Bentuk konservasi

Metode volume hingga dalam ruang 1D diperoleh dengan cara membagi daerah asalnya menjadi beberapa interval yang disebut sebagai volume kontrol dan mengintegrasikan variabel-variabel yang dicari secara numerik pada interval-interval tersebut. Sebagai contoh

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad u = u(x, t), \quad f = f(u) \quad (2.39)$$

yang menyatakan persamaan transport jika  $f(u) = au$ , dengan  $a$  konstan.

### Bentuk Integral

Untuk mengintegrasikan (2.39), gunakan solusi lemah, yaitu bagi domain spasialnya menjadi beberapa kontrol volume dan integralkan persamaan tersebut dalam setiap

kontrol volumenya. Untuk penyederhanaan, kita gunakan interval-interval dengan panjang  $\Delta x$  dan gunakan waktu konstan  $\Delta t$ . Sehingga domain spasial dan temporalnya menjadi

$$\begin{aligned} I_i &= \left[ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] = \left[ x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2} \right], \\ I_n &= [t_n, t_{n+1}] = [n\Delta t, (n+1)\Delta t] \end{aligned}$$

dan pengintegralan persamaan (2.39) pada sebuah interval adalah

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \right] dx &= 0 \\ \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial f}{\partial x} dx &= 0 \\ \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial u}{\partial t} dx + f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) &= 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Karena batas-batas interval  $x_{i\pm\frac{1}{2}}$  tidak bergantung waktu, maka (2.40) dapat dituliskan menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t) dx + f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) = 0 \quad (2.41)$$

Definisikan  $u_i^n$  sebagai rata-rata fungsi  $u(x, t)$  pada interval  $I_i$ , pada waktu  $t_n = n\Delta t$ , yaitu

$$u_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t_n) dx, \quad (2.42)$$

Integralkan (2.41) terhadap  $t$  pada interval  $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ , diperoleh

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} [u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)] dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t))] dt = 0$$

dan dapat kita lihat bahwa nilai dari  $u$  pada interval  $I_i$  hanya berubah terhadap  $\Delta t$  dari fluks  $f$  pada batas-batas interval  $I_i$ . Kemudian gunakan (2.42), yaitu

$$(u_i^{n+1} - u_i^n) \Delta x + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t))] dt = 0 \quad (2.43)$$

## Fluks Numerik

Pada persamaan (2.43) diatas, nilai dari integral  $f$  pada titik  $x_{i\pm\frac{1}{2}}$  secara umum tidak bisa dihitung, jadi kita rubah dengan cara

$$f_{i\pm\frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(u\left(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t\right)\right) dt \quad (2.44)$$

sehingga jika (2.44) kita substitusikan ke (2.43) akan diperoleh

$$(u_i^{n+1} - u_i^n) \Delta x + \left(f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n\right) \Delta t = 0$$

atau

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n\right) \quad (2.45)$$

Algoritma eksplisit (2.45) dapat digunakan untuk menghitung nilai hampiran  $u$  pada tiap-tiap interval.

Fluks numerik ini menyatakan hampiran rata-rata waktu dari fluks sebenarnya pada setiap sisi dari cell, cara perhitungannya tergantung bagaimana cara kita memperoleh skema numeriknya. Untuk menghitung fluks tersebut, variabel-variabel dalam cell yang beririsan dengan  $I_i$  menggunakan

$$f_{i\pm\frac{1}{2}}^n = \phi(u_{i-m}^n, u_{i-m+1}^n, \dots, u_{i+l}^n) \quad (2.46)$$

dengan  $m$  dan  $l$  adalah bilangan-bilangan bulat tak negatif dan  $\phi$  adalah fungsi yang diberikan.

Pada masalah hyperbolic informasi perambatan kecepatannya berhingga, sehingga kita dapat memperoleh  $f_{i-\frac{1}{2}}^n$  dari  $u_{i-1}^n$  dan  $u_i^n$  (rata-rata dari variabel pada kedua sisi di batas cell  $x_{i-\frac{1}{2}}$ ), sedangkan  $f_{i+\frac{1}{2}}^n$  diperoleh dari  $u_i^n$  dan  $u_{i+1}^n$ . Sehingga rumus umum dari (2.46) menjadi

$$f_{i-\frac{1}{2}}^n = \phi(u_{i-1}^n, u_i^n), \quad f_{i+\frac{1}{2}}^n = \phi(u_i^n, u_{i+1}^n) \quad (2.47)$$

## Konvergensi

Algoritma (2.45) dapat digunakan untuk mencari nilai-nilai dari variabel dalam bentuk forward. Untuk memberikan nilai hampiran yang baik, maka algoritma tersebut harus konvergen. Yang berarti solusi numeriknya konvergen terhadap solusi eksak dari persamaan differensialnya jika  $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0$ .

Kriteria konvergensi harus memenuhi dua syarat, yaitu konsistensi dan stability. Dari teorema **Lax** diklaim bahwa skema yang konsisten dan stabil adalah konvergen.

# BAB III

## Metode Penelitian

Metode yang akan digunakan dalam menyelesaikan penelitian ini adalah:

1. Menurunkan persamaan-persamaan dasar dari prinsip-prinsip hukum kesetimbangan yang terjadi pada aliran fluida.
2. Melakukan penskalaan yang bertujuan untuk menondimensionalkan variabel-variabel yang digunakan.
3. Mengaproksimasi variabel-variabel yang tak diketahui dengan menggunakan deret asimtotik.
4. Menyelesaikan sistem dengan melakukan peninjauan pada tiap-tiap orde dari deret, mulai dari orde yang paling rendah sampai orde yang dikehendaki.
5. Menyederhanakan solusi dari deret asimtotik kedalam sebuah model matematika.
6. Membuat prosedur numerik untuk menentukan solusi model dengan menggunakan metode volume hingga.
7. Menganalisis kestabilan dan konsistensi dari prosedur numerik yang telah dibuat.
8. Melakukan simulasi.
9. Memberikan interpretasi dari hasil simulasi.



# BAB IV

## Hasil dan Pembahasan

Perambatan Tsunami dalam penelitian ini dimodelkan dengan menggunakan persamaan gelombang air dangkal yang diturunkan berdasarkan hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum yang berlaku pada fluida yang diamati. Adapun persamaan gelombang air dangkal atau SWE yang diperoleh adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} (hu) + \frac{\partial}{\partial y} (hv) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) = -gh \frac{\partial}{\partial x} b \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (hv) + \frac{\partial}{\partial x} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} \left( hv^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) = -gh \frac{\partial}{\partial y} b \quad (4.3)$$

adapun penurunan dari SWE ini, dapat dilihat pada subbab 3.3.1. SWE merupakan sistem persamaan differensial parsial nonlinier 2D *unsteady* yang mana solusi analitiknya sampai saat ini, belum dapat ditentukan. Telah banyak peneliti yang telah membuat metode-metode hampiran untuk menentukan solusi dari sistem persamaan differensial tersebut, diantaranya adalah [3], [1].

Dalam penelitian ini, penulis mencoba untuk menyelesaikan sistem persamaan differensial diatas menggunakan metode volume hingga. Proses pendiskritan sistem persamaan (4.1), (4.2), dan (4.3) dapat dilihat pada subbab 3.3.2.

Untuk mensimulasikan perambatan Tsunami, akan digunakan SWE diatas dengan kondisi awal dan kondisi batas yang diatur sedemikian hingga dapat menyerupai perambatan gelombang tsunami. Dalam hal ini, kami akan menggunakan efek water drop sebagai pembangkit Tsunami yang disubstitusikan sebagai energi eksternal pada model SWE, dan untuk simulasi perambatan gelombangnya dapat diperoleh dengan cara menyelesaikan SWE tersebut.

Dalam penelitian ini, kami akan melakukan dua buah percobaan, yaitu yang pertama

untuk dasar saluran ( $b(x, y)$ ) konstan dan yang kedua untuk dasar saluran yang tidak konstan.

## 4.1 Penurunan Persamaan Gelombang Air-Dangkal

### 4.1.1 Persamaan Pengatur

Pada subbab ini, kita bahas tentang penurunan persamaan air-dangkal dari persamaan-persamaan pengatur serta kondisi-kondisi pada permukaan bebas dan dasar saluran. Adapun persamaan tersebut adalah:

1. Persamaan kontinuitas,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{pada} \quad -b(x, y) < z < \eta(x, y, t) \quad (4.4)$$

2. Persamaan momentum,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(vu) + \frac{\partial}{\partial z}(wu) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(wv) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uw) + \frac{\partial}{\partial y}(vw) + \frac{\partial}{\partial z}(w^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \quad (4.7)$$

pada  $-b(x, y) < z < \eta(x, y, t)$ .

3. Kondisi kinematik pada permukaan bebas,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial \eta}{\partial y} + w \quad \text{pada} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (4.8)$$

4. Kondisi kinematik pada dasar saluran,

$$u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} + w = 0, \quad \text{pada} \quad z = b(x, y) \quad (4.9)$$

Penurunan dari persamaan-persamaan (4.4), (4.5), (4.6), (4.7), (4.8), dan (4.9) dapat dilihat di bab II.

Persamaan (4.7) kita jabarkan terlebih dahulu menjadi

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} w + u \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} w + v \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial z} w + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g$$

atau

$$\underbrace{\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{turunan total} \left( \frac{Dw}{Dt} \right)} + w \left( \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{persamaan kontinuitas}} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g. \quad (4.10)$$

Pada masalah gelombang panjang atau air dangkal, lapisan air dianggap sangat tipis dan tidak dipengaruhi oleh kedalaman air, sehingga turunan total dari  $w$  dapat diabaikan dan persamaan (4.10) menjadi

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g$$

yang selanjutnya dari persamaan tersebut dapat diperoleh

$$p = \int_{-b}^{\eta} \rho g dz = \rho g (\eta + b) \quad (4.11)$$

Substitusikan  $p$  dari persamaan (4.11) pada persamaan momentum (4.5) dan (4.6), sehingga persamaan-persamaan tersebut menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (vu) + \frac{\partial}{\partial z} (wu) = -g \frac{\partial}{\partial x} (\eta + b) \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uv) + \frac{\partial}{\partial y} (v^2) + \frac{\partial}{\partial z} (wv) = -g \frac{\partial}{\partial y} (\eta + b) \quad (4.13)$$

sampai disini kita punya tiga buah persamaan dengan empat buah variabel yang tak diketahui, yaitu persamaan (4.4), (4.12), (4.13) dimana variabel-variabel yang tak diketahui adalah  $u, v, w, \eta$ .

#### 4.1.2 Persamaan kontinuitas

Agar solusi dari sistem tersebut dapat ditentukan, ketiga persamaan tersebut akan kita integralkan terhadap  $z$ , dimana  $-b(x, y) < z < \eta(x, y, t)$ . Kita mulai dari persamaan kontinuitas (4.4), yaitu

$$\int_{-b}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \right) dz$$

menggunakan aturan Leibniz tentang integral, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} u dz - \left( u|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left( u|_{z=-b} \right) \frac{\partial b}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} v dz - \left( v|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} - \left( v|_{z=-b} \right) \frac{\partial b}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \int_{-b}^{\eta} w dz - \left( w|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial z} - \left( w|_{z=-b} \right) \frac{\partial b}{\partial z} \end{aligned}$$

Karena  $\eta$  dan  $b$  bebas dari  $z$  maka persamaan tersebut menjadi

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} v dz \\ &+ \left[ - \left( u|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left( v|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} + w|_{z=\eta} \right] \\ &- \left[ \left( u|_{z=-b} \right) \frac{\partial b}{\partial x} + \left( v|_{z=-b} \right) \frac{\partial b}{\partial y} + w|_{z=-b} \right] \end{aligned}$$

dengan menggunakan kondisi batas (4.8) dan (4.9) maka diperoleh

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} v dz = 0 \quad (4.14)$$

Berikutnya,

$$\int_{-b}^{\eta} u dz, \quad \text{dan} \quad \int_{-b}^{\eta} v dz$$

kita tuliskan dalam bentuk aproksimasi sebagai

$$\int_{-b}^{\eta} u dz \approx u(\eta + b) \quad \text{dan} \quad \int_{-b}^{\eta} v dz \approx v(\eta + b)$$

dengan asumsi bahwa kedalaman air,  $z = \eta + b$  sangat kecil yang diperoleh dari asumsi air dangkal yang mana sebagai akibatnya  $u$  dan  $v$  dapat dianggap konstan terhadap  $z$ . Selanjutnya persamaan (4.14) menjadi

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u(\eta + b)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(\eta + b)] = 0 \quad (4.15)$$

### 4.1.3 Persamaan momentum dalam arah- $x$

Dalam arah- $x$  persamaan momentumnya adalah

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (vu) + \frac{\partial}{\partial z} (wu) = -g \frac{\partial}{\partial x} (\eta + b)$$

yang selanjutnya kedua ruasnya kita integralkan terhadap  $z$  yaitu

$$\int_{-b}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (vu) + \frac{\partial}{\partial y} (wu) \right) dz = - \int_{-b}^{\eta} \left( g \frac{\partial}{\partial x} (\eta + b) \right) dz \quad (4.16)$$

#### 4.1.3.1 Ruas kiri

Pengintegralan ruas kiri, yaitu

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (vu) + \frac{\partial}{\partial y} (wu) \right) dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^{\eta} u dz - \left( u|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} - \left( u|_{z=-b} \right) \frac{\partial b}{\partial t} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} u^2 dz - \left( u^2|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left( u^2|_{z=-b} \right) \frac{\partial b}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} v u dz - \left( v u|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} - \left( v u|_{z=-b} \right) \frac{\partial b}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \int_{-b}^{\eta} w u dz - \left( w u|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial z} - \left( w u|_{z=-b} \right) \frac{\partial b}{\partial z} \end{aligned}$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (vu) + \frac{\partial}{\partial y} (wu) \right) dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^{\eta} u dz - \left( u|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} u^2 dz - \left( u^2|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left( u^2|_{z=-b} \right) \frac{\partial b}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} v u dz - \left( v u|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} - \left( v u|_{z=-b} \right) \frac{\partial b}{\partial y} \\ &+ (wu)|_{z=\eta} - (wu)|_{z=-b} \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (vu) + \frac{\partial}{\partial y} (wu) \right) dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} v u dz \\ &+ \left[ - \left( u^2|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left( v u|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} + (wu)|_{z=\eta} \right] \\ &- \left[ \left( u^2|_{z=-b} \right) \frac{\partial b}{\partial x} + \left( v u|_{z=-b} \right) \frac{\partial b}{\partial y} + (wu)|_{z=-b} \right] \\ &- \left( u|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (vu) + \frac{\partial}{\partial y} (wu) \right) dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} v u dz \\ &+ u \left[ - \left( u|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left( v|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} + (w)|_{z=\eta} \right] \\ &- u \left[ \left( u|_{z=-b} \right) \frac{\partial b}{\partial x} + \left( v|_{z=-b} \right) \frac{\partial b}{\partial y} + (w)|_{z=-b} \right] \\ &- \left( u|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{aligned}$$

dengan menggunakan kondisi batas (4.8) dan (4.9) maka diperoleh

$$\int_{-b}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (vu) + \frac{\partial}{\partial y} (wu) \right) dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} (u^2) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} (vu) dz \quad (4.17)$$

#### 4.1.3.2 Ruas kanan

Pengintegralan ruas kanan, karena  $\eta$  dan  $b$  bebas dari  $z$ , maka,

$$\begin{aligned} - \int_{-b}^{\eta} \left( g \frac{\partial}{\partial x} (\eta + b) \right) dz &= -g \frac{\partial}{\partial x} (\eta + b) (\eta + b) \\ &= -\frac{1}{2} g \frac{\partial}{\partial x} (\eta + b)^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Menggunakan (4.17) dan (4.18), maka integral persamaan momentum (4.16) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} (u^2) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} (vu) dz = -\frac{1}{2} g \frac{\partial}{\partial x} (\eta + b)^2 \quad (4.19)$$

Selanjutnya kita gunakan aproksimasi

$$\int_{-b}^{\eta} u dz \approx u (\eta + b), \quad \int_{-b}^{\eta} (u^2) dz \approx u^2 (\eta + b), \quad \int_{-b}^{\eta} (vu) dz \approx vu (\eta + b)$$

maka persamaan momentum (4.19) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} [u (\eta + b)] + \frac{\partial}{\partial x} [u^2 (\eta + b)] + \frac{\partial}{\partial y} [vu (\eta + b)] = -\frac{1}{2} g \frac{\partial}{\partial x} (\eta + b)^2$$

atau

$$\frac{\partial}{\partial t} [u (\eta + b)] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ u^2 (\eta + b) + \frac{1}{2} g (\eta + b)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial y} [vu (\eta + b)] = 0 \quad (4.20)$$

#### 4.1.4 Persamaan momentum dalam arah- $y$

Dalam arah- $y$  persamaan momentumnya adalah

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(wv) = -g \frac{\partial}{\partial y}(\eta + b)$$

yang selanjutnya kedua ruasnya kita integralkan terhadap  $z$  yaitu

$$\int_{-b}^{\eta} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(wv) \right) dz = - \int_{-b}^{\eta} \left( g \frac{\partial}{\partial y}(\eta + b) \right) dz \quad (4.21)$$

##### 4.1.4.1 Ruas kiri

Pengintegralan ruas kiri, yaitu

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{\eta} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(wv) \right) dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^{\eta} v dz - (v|_{z=\eta}) \frac{\partial \eta}{\partial t} - (v|_{z=-b}) \frac{\partial b}{\partial t} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} uv dz - (uv|_{z=\eta}) \frac{\partial \eta}{\partial x} - (uv|_{z=-b}) \frac{\partial b}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} v^2 dz - (v^2|_{z=\eta}) \frac{\partial \eta}{\partial y} - (v^2|_{z=-b}) \frac{\partial b}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \int_{-b}^{\eta} wv dz - (wv|_{z=\eta}) \frac{\partial \eta}{\partial z} - (wv|_{z=-b}) \frac{\partial b}{\partial z} \end{aligned}$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{\eta} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(wv) \right) dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^{\eta} v dz - (v|_{z=\eta}) \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} uv dz - (uv|_{z=\eta}) \frac{\partial \eta}{\partial x} - (uv|_{z=-b}) \frac{\partial b}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} v^2 dz - (v^2|_{z=\eta}) \frac{\partial \eta}{\partial y} - (v^2|_{z=-b}) \frac{\partial b}{\partial y} \\ &+ (wv)|_{z=\eta} - (wv)|_{z=-b} \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{\eta} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(wv) \right) dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^{\eta} v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} uv dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} v^2 dz \\ &+ \left[ - (uv|_{z=\eta}) \frac{\partial \eta}{\partial x} - (v^2|_{z=\eta}) \frac{\partial \eta}{\partial y} + (wv)|_{z=\eta} \right] \\ &- \left[ (uv|_{z=-b}) \frac{\partial b}{\partial x} + (v^2|_{z=-b}) \frac{\partial b}{\partial y} + (wv)|_{z=-b} \right] \\ &- (v|_{z=\eta}) \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{\eta} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uv) + \frac{\partial}{\partial y} (v^2) + \frac{\partial}{\partial z} (wv) \right) dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^{\eta} v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} uv dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} v^2 dz \\ &+ v \left[ - \left( u|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left( v|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} + (w)|_{z=\eta} \right] \\ &- v \left[ \left( u|_{z=-b} \right) \frac{\partial b}{\partial x} + \left( v|_{z=-b} \right) \frac{\partial b}{\partial y} + (w)|_{z=-b} \right] \\ &- \left( v|_{z=\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{aligned}$$

dengan menggunakan kondisi batas (4.8) dan (4.9) maka diperoleh

$$\int_{-b}^{\eta} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uv) + \frac{\partial}{\partial y} (v^2) + \frac{\partial}{\partial z} (wv) \right) dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^{\eta} v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} (uv) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} (v^2) dz \quad (4.22)$$

#### 4.1.4.2 Ruas kanan

Pengintegralan ruas kanan, karena  $\eta$  dan  $b$  bebas dari  $z$ , maka,

$$\begin{aligned} - \int_{-b}^{\eta} \left( g \frac{\partial}{\partial y} (\eta + b) \right) dz &= -g \frac{\partial}{\partial y} (\eta + b) (\eta + b) \\ &= -\frac{1}{2} g \frac{\partial}{\partial y} (\eta + b)^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Menggunakan (4.22) dan (4.23), maka integral persamaan momentum (4.21) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^{\eta} v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\eta} (uv) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\eta} (v^2) dz = -\frac{1}{2} g \frac{\partial}{\partial y} (\eta + b)^2 \quad (4.24)$$

Selanjutnya kita gunakan aproksimasi

$$\int_{-b}^{\eta} v dz \approx v (\eta + b), \quad \int_{-b}^{\eta} (uv) dz \approx uv (\eta + b), \quad \int_{-b}^{\eta} (v^2) dz \approx v^2 (\eta + b)$$

maka persamaan momentum (4.24) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} [v (\eta + b)] + \frac{\partial}{\partial x} [uv (\eta + b)] + \frac{\partial}{\partial y} [v^2 (\eta + b)] = -\frac{1}{2} g \frac{\partial}{\partial y} (\eta + b)^2$$

atau

$$\frac{\partial}{\partial t} [v (\eta + b)] + \frac{\partial}{\partial x} [uv (\eta + b)] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ v^2 (\eta + b) + \frac{1}{2} g (\eta + b)^2 \right] = 0 \quad (4.25)$$



## 4.2 Model Gelombang Air-Dangkal

Sampai disini, kita memperoleh sistem persamaan differensial dengan tiga buah persamaan dalam bentuk konservasi yaitu

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u (\eta + b)] + \frac{\partial}{\partial y} [v (\eta + b)] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} [u (\eta + b)] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ u^2 (\eta + b) + \frac{1}{2} g (\eta + b)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial y} [vu (\eta + b)] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} [v (\eta + b)] + \frac{\partial}{\partial x} [uv (\eta + b)] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ v^2 (\eta + b) + \frac{1}{2} g (\eta + b)^2 \right] &= 0\end{aligned}$$

selanjutnya misalkan kedalaman air  $(\eta + b)$  sebagai

$$h = \eta + b$$

maka sistem persamaan differensial diatas dapat kita tuliskan menjadi

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu) + \frac{\partial}{\partial y} (hv) = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) = 0 \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (hv) + \frac{\partial}{\partial x} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} \left( hv^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) = 0 \quad (4.28)$$

Persamaan (4.26) diperoleh dengan menuliskan suku

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\eta + b) = \frac{\partial h}{\partial t}.$$

## 4.3 Pelinieran Model SWE

Persamaan air dangkal (4.26), (4.27), dan (4.28) dapat dilinierkan dengan memisalkan perubahan ketinggian permukaan gelombang cukup kecil di sekitar ketinggian permukaan gelombang pada kondisi diam, yaitu

$$\eta = 0 + \eta', \quad u = 0 + u', \quad v = 0 + v' \quad (4.29)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (4.29) pada persamaan air dangkal (??), (??), (??) dan dengan mengabaikan suku-suku pada orde-2, akan diperoleh bentuk linier

dari persamaan air dangkal

$$\frac{\partial h}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (4.32)$$

Kalikan persamaan (4.30) dengan  $\sqrt{b}$  dan (4.31), (4.32) dengan  $\sqrt{h}$ , maka diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} (\eta \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial x} (u \sqrt{h} \cdot \sqrt{gh}) + \frac{\partial}{\partial y} (v \sqrt{h} \cdot \sqrt{gh}) = 0 \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (u \sqrt{h}) + \sqrt{gh} \frac{\partial}{\partial x} (\eta \sqrt{g}) = 0 \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (v \sqrt{h}) + \sqrt{gh} \frac{\partial}{\partial y} (\eta \sqrt{g}) = 0 \quad (4.35)$$

Jika  $u \sqrt{h}$  dan  $v \sqrt{h}$  kita eliminasi dari persamaan-persamaan diatas, akan diperoleh persamaan gelombang 2D sebagai berikut,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\eta \sqrt{g}) = \nabla \cdot [gh \cdot \nabla (\eta \sqrt{g})] \quad (4.36)$$

dengan kecepatan fasenya berupa  $c(x, y) = \sqrt{gh}$ , dengan  $h$  adalah fungsi terhadap  $x$  dan  $y$ .

Persamaan *vorticity* diturunkan dengan cara mendefinisikan vorticity sebagai  $\omega(x, y, t) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ . Jika *vorticity* ini diterapkan pada persamaan (4.34) dan (4.35) sebagai  $\frac{\partial}{\partial x}$  (4.34) –  $\frac{\partial}{\partial y}$  (4.35), yang menghasilkan

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0. \quad (4.37)$$

Hal ini berarti *vorticity* konstan terhadap waktu. Secara umum, vektor kecepatan  $(u, v)$  dapat di dekomposisi dalam bentuk rotasi dan non rotasi, sedemikian hingga  $u$  dan  $v$  dapat dituliskan sebagai

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4.38)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4.39)$$

dengan  $\psi$  dan  $\phi$  adalah fungsi arus dan kecepatan potensial. Menggunakan (4.38) dan (4.39), persamaan (4.37) dapat dituliskan menjadi

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) = 0 \quad (4.40)$$

Dengan menyelesaikan  $\frac{\partial}{\partial x}(4.34) - \frac{\partial}{\partial y}(4.35)$ , akan diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \phi) + \sqrt{g} \nabla^2 (\eta \sqrt{g}) = 0 \quad (4.41)$$

Bentuk rotasi dari vektor kecepatannya dapat diperoleh dengan cara mengintegralkan vektor vorticity (4.40) terhadap waktu, sedangkan bentuk non rotasinya diperoleh dari solusi persamaan (4.36) dan (4.41).

## 4.4 Syarat Batas Transparan dan Syarat Batas Serap bagi SWE Linier 1D

Persamaan air dangkal atau shallow water equation (SWE) adalah persamaan yang memodelkan pergerakan gelombang dalam fluida ideal dengan asumsi kedalaman fluida relatif kecil dibanding dengan panjang gelombang. Dalam penelitian ini akan dibahas persamaan air dangkal linier 1D dan 2D. Pada persamaan air dangkal linier 1D profil gelombang merupakan fungsi dari variabel ruang  $x$  dan variabel waktu  $t$ .

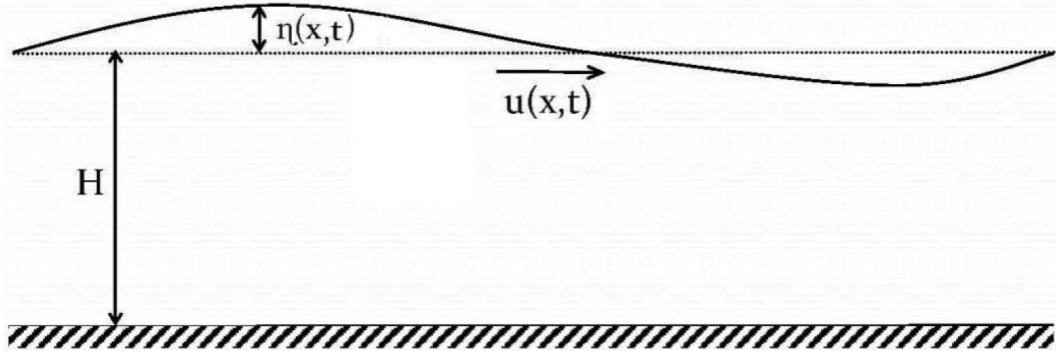


Figure 4.1: Skema lapisan air dangkal linier 1D

Perhatikan domain fluida pada Gambar 4.1 untuk dasar yang rata dimana kedalaman fluida adalah  $b$ , variabel  $h(x, t)$  menyatakan simpangan permukaan air dari kondisi setimbang  $z = b$  pada saat  $t$ , dan variabel  $u(x, t)$  menyatakan komponen horizontal kecepatan partikel fluida di permukaan pada saat  $t$ . Persamaan air dangkal linier 1D adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (4.43)$$

dengan  $g$  menyatakan percepatan gravitasi. Persamaan (4.42) diperoleh dari prinsip konservasi massa, sedangkan persamaan (4.43) diperoleh dari prinsip konservasi mo-

mentum. Pada persamaan (4.42) dan (4.43) variabel  $\eta(x, t)$  dan  $u(x, t)$  saling terkait dan dapat dituliskan dalam bentuk lain dimana persamaan untuk variabel  $\eta$  dan  $u$  saling terpisah yaitu berupa dua buah persamaan gelombang berikut

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4.45)$$

dengan  $c^2 = gb$ . Persamaan (4.44) diperoleh dengan cara eliminasi  $u$  dari persamaan (4.42) dan (4.43). Sedangkan persamaan (4.45) diperoleh dengan cara eliminasi  $\eta$  dari persamaan (4.42) dan (4.43). Dengan demikian jelaslah bahwa persamaan air dangkal linier 1D identik dengan dua buah persamaan gelombang, sehingga solusi dari persamaan air dangkal linier 1D sama dengan solusi persamaan gelombang.

#### 4.4.1 Metode Lax

Metode Lax merupakan salah satu metode numerik yang biasa digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial parsial tipe hiperbolik. Metode Lax memiliki akurasi  $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$  karena metode Lax merupakan modifikasi dari metode FTCS (*forward time center space*) dimana nilai  $\eta_j^n$  diganti dengan nilai rata-rata dari  $\eta_{j+1}^n$  dan  $\eta_{j-1}^n$ . Perhatikan dua hampiran berikut

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_j^n = \frac{\eta_j^{n+1} - \frac{1}{2}(\eta_{j+1}^n + \eta_{j-1}^n)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (4.46)$$

dan

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (4.47)$$

dengan mensubstitusikan (4.46) dan (4.47) ke persamaan (4.42) maka diperoleh

$$\frac{\eta_j^{n+1} - \frac{1}{2}(\eta_{j+1}^n + \eta_{j-1}^n)}{\Delta t} + b \left( \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) = 0 \quad (4.48)$$

Hal yang sama juga berlaku untuk  $u$  dimana nilai  $u_j^n$  diganti dengan nilai rata-rata dari  $u_{j+1}^n$  dan  $u_{j-1}^n$ . Perhatikan dua hampiran berikut

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (4.49)$$

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_j^n = \frac{\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (4.50)$$

dengan mensubstitusikan (4.49) dan (4.50) ke persamaan (4.43) maka akan diperoleh persamaan beda sebagai berikut

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\Delta t} + g \left( \frac{\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) = 0 \quad (4.51)$$

Persamaan beda dikatakan stabil jika persamaan beda menghasilkan solusi yang berhingga. Dengan mensubstitusikan  $\eta_j^n = p^n e^{iaj}$  dan  $u_j^n = r^n e^{iaj}$  ke dalam persamaan (4.48) dan (4.51) maka akan diperoleh

$$\begin{bmatrix} p^{n+1} \\ r^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -ib \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin a \\ -ig \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin a & \cos a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^n \\ r^n \end{bmatrix}$$

atau juga dapat dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} p^{n+1} \\ r^{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p^n \\ r^n \end{bmatrix},$$

dengan matriks amplifikasi

$$A = \begin{bmatrix} \cos a & -ib \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin a \\ -ig \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin a & \cos a \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan kriteria kestabilan Von Neumann maka norm nilai eigen dari matriks amplifikasi haruslah  $\leq 1$ . Nilai eigen  $\lambda$  dari matriks  $A$  memenuhi persamaan

$$(\lambda - \cos a)^2 + gb \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a = 0 \quad (4.52)$$

sehingga akan diperoleh

$$\lambda_{1,2} = \cos a \pm i \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gb} \sin a$$

maka agar  $|\lambda_{1,2}| \leq 1$  haruslah

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gb} \leq 1,$$

jadi metode Lax untuk persamaan air dangkal linier 1D stabil jika  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gb} \leq 1$ .

#### 4.4.2 Metode Godunov

Metode Godunov merupakan salah satu metode finite volume yang biasa dipakai untuk menyelesaikan persamaan air dangkal. Perhatikan selang  $[0, L]$  pada Gambar 4.24.2

yang dipartisi dengan ukuran selang  $\frac{1}{2}\Delta x$  dan titik-titik partisi  $x_{\frac{1}{2}} = 0, \dots, x_{j-\frac{1}{2}}, x_j, x_{j+\frac{1}{2}}, \dots, x_{Nx}, x_{Nx+\frac{1}{2}} = L$ . Cell- $j$  adalah selang  $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$  dan cell- $j + \frac{1}{2}$  adalah selang  $[x_j, x_{j+1}]$ .

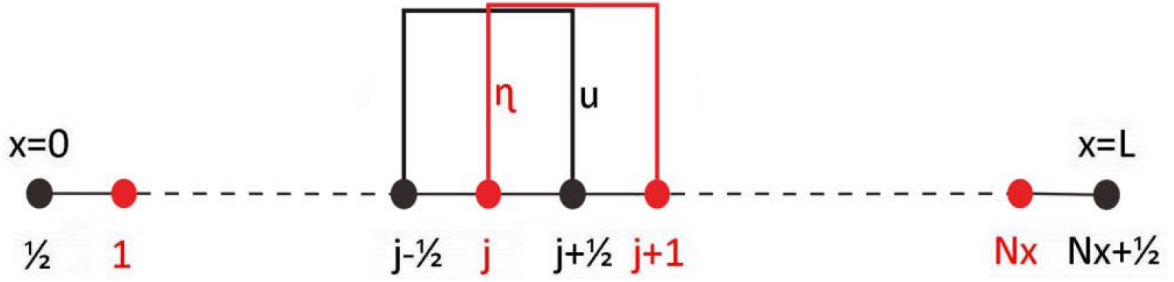


Figure 4.2: Staggered grid 1D

Persamaan (4.42) didiskritisasi di cell- $j$ , sehingga  $\eta$  diperoleh di setiap titik grid penuh ( $x_j$  dengan  $j = 1, \dots, Nx$ ), sedangkan persamaan (4.43) didiskritisasi di cell- $j + \frac{1}{2}$ , sehingga nilai  $u$  diperoleh di setiap titik grid tengahan ( $x_{j+\frac{1}{2}}$  dengan  $j = 1, \dots, Nx-1$ ).

Metode Godunov untuk SWE linier 1D dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\Delta t} + b \left( \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \right) &= 0 \\ \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + g \left( \frac{\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_j^{n+1}}{\Delta x} \right) &= 0 \end{aligned}$$

atau

$$\eta_j^{n+1} - \eta_j^n = -\frac{b\Delta t}{\Delta x} (u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n) \quad (4.53)$$

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n = -\frac{g\Delta t}{\Delta x} (\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_j^{n+1}) \quad (4.54)$$

dimana

$$\eta_j^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{cell-j} \eta(x, t_n) dx \quad \text{dan} \quad u_j^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{cell-j+\frac{1}{2}} u(x, t_n) dx.$$

Diskritisasi spatial pada persamaan (4.53) dan (4.54) dilakukan dengan *center space*, oleh karena itu metode ini memiliki akurasi orde dua terhadap ruang tetapi orde satu terhadap waktu.

Perhatikan Gambar 4.3 bagian kiri, dalam hal flow positif atau  $u > 0$ ,  $bu_{j-\frac{1}{2}}$  menyatakan fluks massa yang memasuki cell- $j$  dari kiri  $x_{j-\frac{1}{2}}$ , sedangkan  $bu_{j+\frac{1}{2}}$  menyatakan fluks massa yang keluar dari cell- $j$  dari kanan  $x_{j+\frac{1}{2}}$ . Sedangkan pada Gambar 4.3 bagian

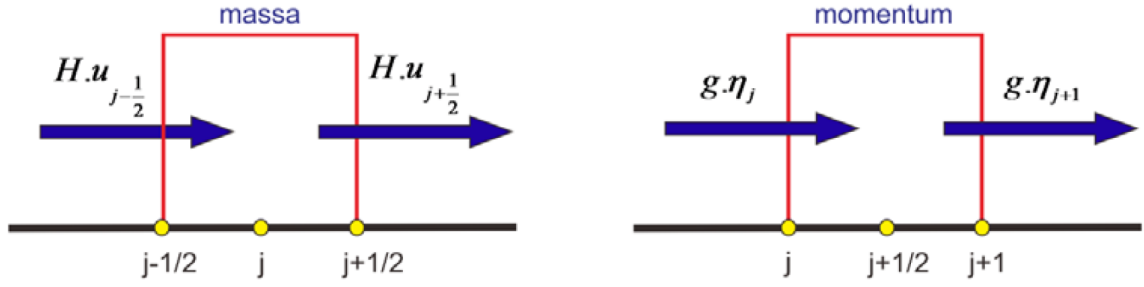


Figure 4.3: Ilustrasi konservasi massa dan momentum

kanan,  $g\eta_j$  menyatakan momentum yang memasuki cell- $j + \frac{1}{2}$  dari kiri  $x_j$ , sedangkan  $g\eta_{j+1}$  menyatakan momentum yang keluar dari cell- $j + \frac{1}{2}$  dari kanan  $x_{j+1}$ . Dengan demikian persamaan (4.53) secara tepat menyatakan kekekalan massa untuk cell- $j$ , demikian juga persamaan (4.54) secara tepat menyatakan kekekalan momentum untuk cell- $j + \frac{1}{2}$ .

Perhatikan ruas kanan dari persamaan (4.54), nilai  $\eta$  yang digunakan adalah nilai  $\eta$  pada waktu  $t_{n+1}$ , hal ini penting untuk mendapatkan persamaan beda yang stabil. Meskipun dihitung di waktu  $t_{n+1}$ , persamaan diskrit (4.53) dan (4.54) masih termasuk metode eksplisit.

Syarat kestabilan Von Neumann dari persamaan diskrit (4.53) dan (4.54) akan ditunjukkan. Substitusikan  $\eta_j^n = p^n e^{iaj}$  dan  $u_{j+\frac{1}{2}}^n = r^n e^{ia(j+\frac{1}{2})}$  ke dalam persamaan (4.53) dan (4.54) sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2ig \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{a}{2}\right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^{n+1} \\ r^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2ib \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{a}{2}\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^n \\ r^n \end{bmatrix}$$

atau dapat juga dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} p^{n+1} \\ r^{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p^n \\ r^n \end{bmatrix},$$

dengan matriks amplifikasi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2ib \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{a}{2}\right) \\ -2ig \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{a}{2}\right) & 1 - 4gb \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan kriteria kestabilan Von Neumann maka norm nilai eigen dari matriks amplifikasi  $A$  haruslah lebih kecil atau sama dengan satu. Nilai eigen  $\lambda$  dari matriks  $A$  memenuhi

$$(\lambda - 1) \left( \lambda - \left( 1 - 4gb \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \right) \right) + 4gb \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

atau dapat juga disederhanakan menjadi

$$\lambda^2 - 2 \left( 1 - 2gb \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left( \frac{a}{2} \right) \right) \lambda + 1 = 0,$$

dengan menotasikan  $c = 1 - 2gb \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left( \frac{a}{2} \right)$ , selanjutnya diperoleh

$$\lambda^2 - 2c\lambda + 1 = 0 \quad (4.55)$$

Persamaan (4.55) memiliki solusi

$$\lambda_{1,2} = c \pm \sqrt{c^2 - 1}.$$

**Kasus 1:**  $c^2 > 1$ , untuk  $c > 1$  diperoleh  $|\lambda_1| = |c + \sqrt{c^2 - 1}| > 1$ , sedangkan untuk  $c < -1$  diperoleh  $|\lambda_2| = |c - \sqrt{c^2 - 1}| > 1$  sehingga untuk  $c^2 > 1$ , metode tidak stabil.

**Kasus 2:**  $c^2 \leq 1$  maka  $\lambda_{1,2} = c \pm i\sqrt{1 - c^2}$  sehingga  $|\lambda_{1,2}| = |c \pm i\sqrt{1 - c^2}| = \sqrt{c^2 + (1 - c^2)} = 1$ . Jadi jika  $c^2 \leq 1$  maka metode tersebut selalu stabil.

Jadi syarat kestabilan metode Godunov untuk persamaan air dangkal linier 1D adalah  $-1 \leq c = 1 - 2gb \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left( \frac{a}{2} \right) \leq 1$ , yang dapat disederhanakan menjadi  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gb} \leq 1$ . Selanjutnya karena  $|\lambda_{1,2}| = 1$  maka diskritisasi ini bersifat non dissipative, artinya error difusi numerik tidak ada.

## 4.5 Syarat Batas Serap bagi SWE Linier 2D

Pada persamaan air dangkal linier 2D profil gelombang merupakan fungsi dari variabel ruang  $x$  dan  $y$ , serta variabel waktu  $t$ . Persamaan air dangkal linier 2D adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial h}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (4.58)$$

dimana variabel  $h$  menyatakan simpangan permukaan air dari kondisi setimbang  $z = b$ , variabel  $u$  menyatakan kecepatan partikel fluida di permukaan pada arah sumbu  $x$ , variabel  $v$  menyatakan kecepatan partikel fluida di permukaan pada arah sumbu  $y$ , dan  $g$  menyatakan percepatan gravitasi.



### 4.5.1 Metode Lax

Metode Lax dua dimensi memiliki akurasi  $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$  karena metode Lax merupakan modifikasi dari metode FTCS (*forward time center space*). Metode Lax untuk persamaan air dangkal linier 2D dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{h_{j,k}^{n+1} - \frac{1}{2}(h_{j+1,k+1}^n + h_{j-1,k-1}^n)}{\Delta t} + b \left( \frac{u_{j+1,k}^n - u_{j-1,k}^n}{2\Delta x} \right) + b \left( \frac{v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n}{2\Delta y} \right) = 0 \quad (4.59)$$

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1,k}^n + u_{j-1,k}^n)}{\Delta t} + g \left( \frac{h_{j+1,k}^n - h_{j-1,k}^n}{2\Delta x} \right) = 0 \quad (4.60)$$

$$\frac{v_{j,k}^{n+1} - \frac{1}{2}(v_{j,k+1}^n + v_{j,k-1}^n)}{\Delta t} + g \left( \frac{h_{j,k+1}^n - h_{j,k-1}^n}{2\Delta y} \right) = 0 \quad (4.61)$$

Persamaan beda dikatakan stabil jika persamaan beda menghasilkan solusi yang berhingga.

Dengan mensubstitusikan  $h_{j,k}^n = p^n e^{ia(j+k)}$ ,  $u_{j,k}^n = r^n e^{ia(j+k)}$ , dan  $v_{j,k}^n = s^n e^{ia(j+k)}$  ke dalam persamaan diskrit (4.59), (4.60), dan (4.61) maka akan diperoleh

$$\begin{bmatrix} p^{n+1} \\ r^{n+1} \\ s^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -ib \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin a & -ib \frac{\Delta t}{\Delta y} \sin a \\ -g \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin a & \cos a & 0 \\ -g \frac{\Delta t}{\Delta y} \sin a & 0 & \cos a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^n \\ r^n \\ s^n \end{bmatrix}$$

atau dapat juga dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} p^{n+1} \\ r^{n+1} \\ s^{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p^n \\ r^n \\ s^n \end{bmatrix},$$

dengan matriks amplifikasi

$$A = \begin{bmatrix} \cos a & -ib \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin a & -ib \frac{\Delta t}{\Delta y} \sin a \\ -g \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin a & \cos a & 0 \\ -g \frac{\Delta t}{\Delta y} \sin a & 0 & \cos a \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan kriteria kestabilan Von Neumann maka norm nilai eigen dari matriks amplifikasi  $A$  haruslah lebih kecil atau sama dengan satu. Dengan penyederhanaan

$\Delta x = \Delta y$  maka nilai eigen  $\lambda$  dari matriks  $A$  memenuhi

$$(\lambda - \cos a) \left( (\lambda - \cos a)^2 - 2igb \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a \right) = 0.$$

Untuk  $\lambda = \cos a$  jelas  $|\lambda| \leq 1$ , sedangkan untuk

$$(\lambda - \cos a)^2 - 2igb \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a = 0$$

akan diperoleh akar-akar

$$\lambda_{1,2} = \cos a \pm i \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin a \sqrt{2gb}$$

maka agar  $|\lambda_{1,2}| \leq 1$  haruslah

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{2gb} \leq 1,$$

jadi metode Lax untuk persamaan air dangkal linier 2D akan stabil jika  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{2gb} \leq 1$ .

#### 4.5.2 Metode Godunov

Perhatikan domain komputasi  $[0, Lx] \times [0, Ly]$  pada gambar 4.4 berikut ini. Selang  $[0, Lx]$  dipartisi dengan ukuran selang  $\frac{1}{2}\Delta x$  dengan titik-titik partisi  $x_{\frac{1}{2}} = 0, x_1, \dots, x_{j-\frac{1}{2}}, x_j, x_{j+\frac{1}{2}}, \dots, x_{Nx}, x_{Nx+\frac{1}{2}} = Lx$ . Demikian pula selang  $[0, Ly]$  dipartisi dengan ukuran selang  $\frac{1}{2}\Delta y$  dengan titik-titik partisi  $y_{\frac{1}{2}} = 0, y_1, \dots, y_{k-\frac{1}{2}}, y_k, y_{k+\frac{1}{2}}, \dots, y_{Ny}, y_{Ny+\frac{1}{2}} = Ly$ .

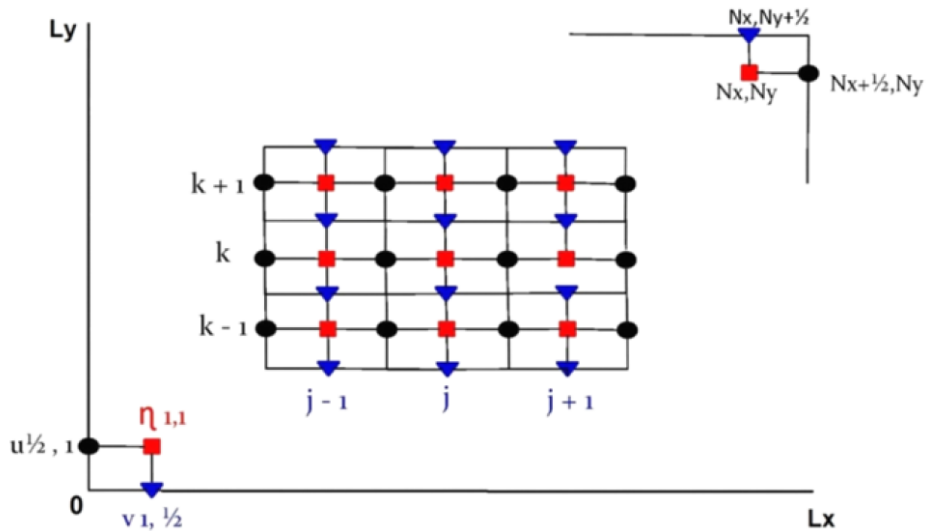


Figure 4.4: Staggered grid 2D (Arakawa C-Grid)

Cell  $\langle j, k \rangle$  adalah daerah  $\left[ x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}} \right] \times \left[ y_{k-\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}} \right]$ , cell  $\langle j + \frac{1}{2}, k \rangle$  adalah daerah  $\left[ x_j, x_{j+1} \right] \times \left[ y_{k-\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}} \right]$ , dan cell  $\langle j, k + \frac{1}{2} \rangle$  adalah daerah  $\left[ x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}} \right] \times \left[ y_k, y_{k+1} \right]$ . Persamaan (4.59) didiskritisasi di cell  $\langle j, k \rangle$ , sehingga nilai  $h$  diperoleh di setiap titik grid  $(x_j, y_k)$  dengan  $j = 1, \dots, Nx$  dan  $k = 1, \dots, Ny$ . Persamaan (4.60) didiskritisasi di cell  $\langle j + \frac{1}{2}, k \rangle$ , sehingga nilai  $u$  diperoleh di setiap titik grid  $(x_{j+\frac{1}{2}}, y_k)$  dengan  $j = 1, \dots, Nx - 1$  dan  $k = 1, \dots, Ny$ . Persamaan (4.61) didiskritisasi di cell  $\langle j, k + \frac{1}{2} \rangle$ , sehingga nilai  $v$  diperoleh di setiap titik grid  $(x_j, y_{k+\frac{1}{2}})$  dengan  $j = 1, \dots, Nx$  dan  $k = 1, \dots, Ny - 1$ .

Metode Godunov untuk persamaan air dangkal linier 2D dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{h_{j,k}^{n+1} - h_{j,k}^n}{\Delta t} + b \left( \frac{u_{j+\frac{1}{2},k}^n - u_{j-\frac{1}{2},k}^n}{\Delta x} \right) + b \left( \frac{v_{j,k+\frac{1}{2}}^n - v_{j,k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} \right) = 0 \quad (4.62)$$

$$\frac{u_{j+\frac{1}{2},k}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2},k}^n}{\Delta t} + g \left( \frac{h_{j+1,k}^{n+1} - h_{j,k}^{n+1}}{\Delta x} \right) = 0 \quad (4.63)$$

$$\frac{v_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{j,k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + g \left( \frac{h_{j,k+1}^{n+1} - h_{j,k}^{n+1}}{\Delta y} \right) = 0 \quad (4.64)$$

Lihat Gambar 3.2, persamaan (4.62) berlaku di setiap titik grid  $(x_j, y_k)$  dengan  $j = 1, \dots, Nx$  dan  $k = 1, \dots, Ny$ . Bagian  $b \cdot u_{j-\frac{1}{2},k}$  menyatakan fluks massa yang masuk pada cell  $\langle j, k \rangle$  melalui sisi kiri, sedangkan bagian  $b \cdot u_{j+\frac{1}{2},k}$  menyatakan fluks massa yang keluar dari cell  $\langle j, k \rangle$  melalui sisi kanan. Demikian juga bagian  $b \cdot v_{j,k+\frac{1}{2}}$  menyatakan fluks massa yang masuk pada cell  $\langle j, k \rangle$  melalui sisi bawah, sedangkan bagian  $b \cdot v_{j,k-\frac{1}{2}}$  menyatakan fluks massa yang keluar dari cell  $\langle j, k \rangle$  melalui sisi atas. Demikianlah persamaan (4.62) menyatakan secara tepat konservasi massa untuk cell  $\langle j, k \rangle$ .

Lihat Gambar 4.6 bagian kiri, persamaan (4.63) berlaku pada setiap titik grid  $(x_{j+\frac{1}{2}}, y_k)$  dengan  $j = 1, \dots, Nx - 1$  dan  $k = 1, \dots, Ny$ . Perhatikan momentum  $gh_{j,k}$  yang memasuki cell  $\langle j + \frac{1}{2}, k \rangle$  dan momentum  $gh_{j+1,k}$  yang keluar dari cell  $\langle j + \frac{1}{2}, k \rangle$  maka terlihat bahwa persamaan (4.63) menyatakan secara tepat konservasi momentum untuk cell  $\langle j + \frac{1}{2}, k \rangle$ .

Lihat Gambar (4.6) bagian kanan, persamaan (4.64) berlaku pada setiap titik grid  $(x_j, y_{k+\frac{1}{2}})$  dengan  $j = 1, \dots, Nx$  dan  $k = 1, \dots, Ny - 1$ . Perhatikan momentum  $gh_{j,k}$  yang memasuki cell  $\langle j, k + \frac{1}{2} \rangle$  dan momentum  $gh_{j,k+1}$  yang keluar dari cell  $\langle j, k + \frac{1}{2} \rangle$  maka terlihat bahwa persamaan (4.64) menyatakan secara tepat konservasi momentum untuk cell  $\langle j, k + \frac{1}{2} \rangle$ .

Perhatikan ruas kanan dari persamaan (4.63) dan (4.64), nilai  $h$  yang digunakan adalah nilai  $h$  pada waktu  $t_{n+1}$ , hal ini penting untuk mendapatkan persamaan beda yang

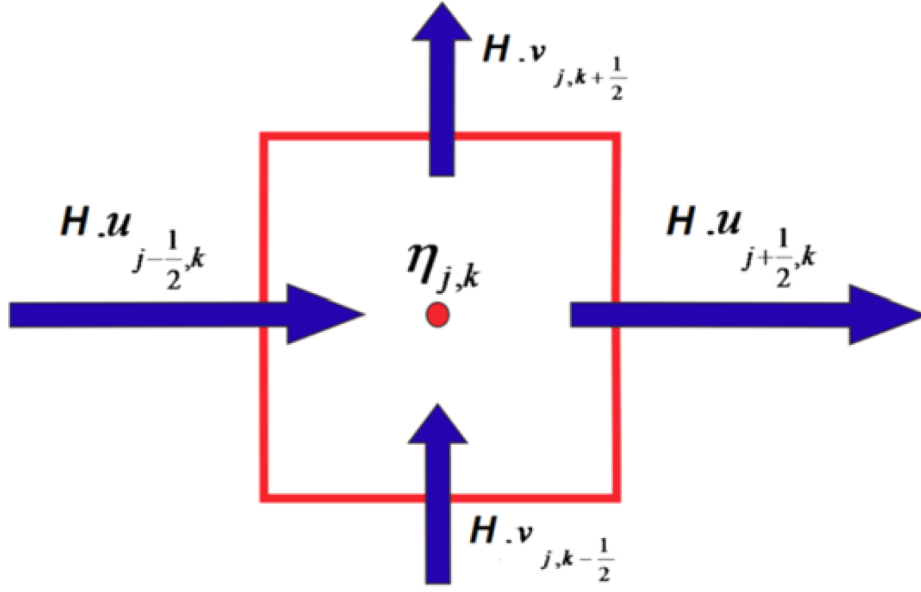


Figure 4.5: Ilustrasi konservasi massa 2D

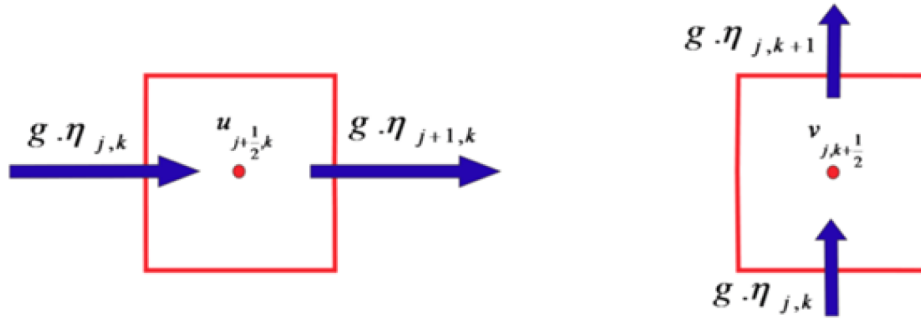


Figure 4.6: Ilustrasi konservasi momentum 2D

stabil. Meskipun dihitung di waktu  $t_{n+1}$ , persamaan diskrit (4.62), (4.63), dan (4.64) masih termasuk metode eksplisit.

Syarat kestabilan Von Neumann dari persamaan diskrit (4.62), (4.63), dan (4.64) akan ditunjukkan. Substitusikan  $h_{j,k}^n = p^n e^{ia(j+k)}$ ,  $u_{j+1/2,k}^n = r^n e^{ia(j+\frac{1}{2},k)}$ , dan  $v_{j,k+1/2}^n = s^n e^{ia(j+k+\frac{1}{2})}$  ke dalam persamaan diskrit (4.62), (4.63), dan (4.64) sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} p^{n+1} \\ r^{n+1} \\ s^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2ib \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{a}{2}\right) & -2ib \frac{\Delta t}{\Delta y} \sin\left(\frac{a}{2}\right) \\ -2ig \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{a}{2}\right) & 1 - 4gb \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) & -4gb \frac{\Delta t^2}{\Delta x \Delta y} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \\ -2ig \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{a}{2}\right) & -4gb \frac{\Delta t^2}{\Delta x \Delta y} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) & 1 - 4gb \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^n \\ r^n \\ s^n \end{bmatrix}$$

atau dapat juga dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} p^{n+1} \\ r^{n+1} \\ s^{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p^n \\ r^n \\ s^n \end{bmatrix},$$

dengan matriks amplifikasi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2ib\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\left(\frac{a}{2}\right) & -2ib\frac{\Delta t}{\Delta y}\sin\left(\frac{a}{2}\right) \\ -2ig\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\left(\frac{a}{2}\right) & 1 - 4gb\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) & -4gb\frac{\Delta t^2}{\Delta x\Delta y}\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \\ -2ig\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\left(\frac{a}{2}\right) & -4gb\frac{\Delta t^2}{\Delta x\Delta y}\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) & 1 - 4gb\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Berdasarkan kriteria kestabilan Von Neumann maka norm nilai eigen dari matriks amplifikasi  $A$  haruslah lebih kecil atau sama dengan satu. Dengan penyederhanaan  $\Delta x = \Delta y$  maka nilai eigen  $\lambda$  dari matriks  $A$  memenuhi

$$(\lambda - 1) \left( \lambda^2 - 2 \left( 1 - 4gb\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \right) \lambda + 1 \right) = 0,$$

untuk  $\lambda = 1$  jelas metode stabil, dengan mensubstitusikan

$$\beta = 1 - 4gb\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

ke dalam

$$\lambda^2 - 2 \left( 1 - 4gb\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \right) \lambda + 1 = 0$$

selanjutnya akan diperoleh

$$\lambda^2 - 2\beta\lambda + 1 = 0 \tag{4.65}$$

Persamaan (4.65) memiliki solusi

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

**Kasus 1:**  $\beta^2 > 1$ , untuk  $\beta > 1$  diperoleh

$$|\lambda_1| = \left| \beta + \sqrt{\beta^2 - 1} \right| > 1,$$

sedangkan untuk  $\beta < -1$  diperoleh

$$|\lambda_2| = \left| \beta - \sqrt{\beta^2 - 1} \right| > 1$$

sehingga untuk  $\beta^2 > 1$ , metode tidak stabil.

**Kasus 2:**  $\beta^2 < 1$  maka

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm i\sqrt{1 - \beta^2}$$

sehingga

$$|\lambda_{1,2}| = \left| \beta \pm i\sqrt{1 - \beta^2} \right| = \sqrt{\beta^2 + (1 - \beta^2)} = 1.$$

Jadi jika  $\beta^2 \leq 1$  maka metode selalu stabil.

Jadi syarat kestabilan metode Godunov untuk persamaan air dangkal linier 2D adalah

$$-1 \leq \beta = 1 - 4gb \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left( \frac{a}{2} \right) \leq 1,$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{2gb} \leq 1.$$

Selanjutnya karena  $|\lambda_{1,2}| = 1$  maka solusi numerik bersifat non dissipative, artinya solusi numerik tidak mengalami *damping*.

### 4.5.3 Plane Wave dan Circular Wave

Muka gelombang atau front gelombang adalah tempat kedudukan titik-titik yang memiliki fase yang sama pada gelombang. Ada dua macam muka gelombang, yaitu muka gelombang lurus dan muka gelombang lingkaran, seperti terlihat pada Gambar 4.7 berikut

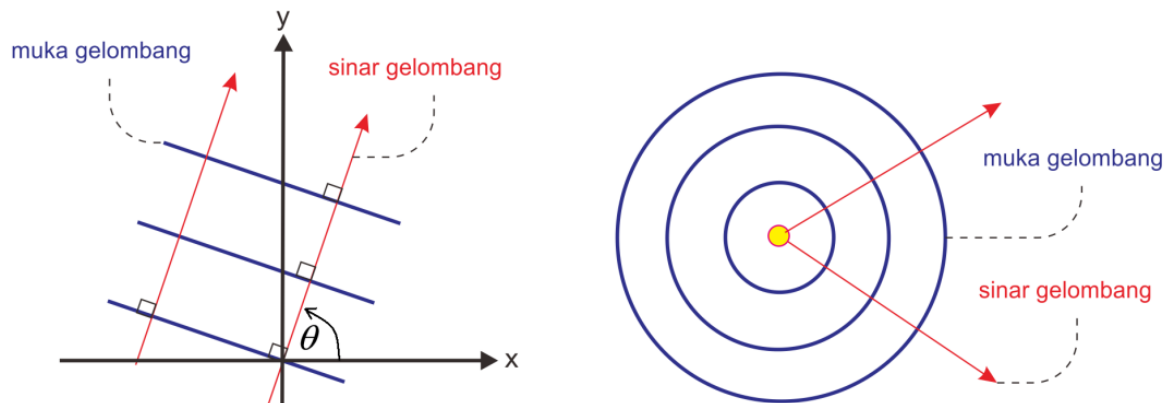


Figure 4.7: Gelombang bidang dan gelombang melingkar

Setiap gelombang merambat dengan arah tertentu. Arah rambat suatu gelombang disebut sinar gelombang. Sinar gelombang pada muka gelombang lurus berbentuk garis lurus yang tegak lurus pada muka gelombang tersebut, seperti terlihat pada gambar 4.7 sebelah kiri. Sinar gelombang pada muka gelombang lingkaran berbentuk garis lurus berarah radial keluar dari sumber gelombang, seperti terlihat pada Gambar 4.7 bagian kanan.

Gelombang bidang atau plane wave adalah gelombang yang memiliki muka gelombang berbentuk garis lurus. Rumus umum gelombang bidang adalah

$$h(x, y, t) = Ae^{i(\bar{k}\bar{r}-\omega t)} \quad (4.66)$$

dengan

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

menyatakan vektor posisi,  $A$  menyatakan amplitudo,  $\omega$  menyatakan frekuensi sudut, dan

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} k \cos \theta \\ k \sin \theta \end{bmatrix}$$

menyatakan vektor bilangan gelombang, dimana  $\theta$  adalah sudut antara sinar gelombang dengan sumbu- $x$ .

Gelombang melingkar atau circular wave adalah gelombang yang memiliki muka gelombang berbentuk lingkaran. Syarat awal gelombang melingkar yang dipakai dalam simulasi ini adalah

$$h(x, y) = \begin{cases} A \cos \left( \frac{\pi}{2R_0} \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \right), & \text{untuk } (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R_0^2 \\ 0, & \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

dengan  $A$  menyatakan amplitudo gelombang,  $R_0$  menyatakan jari-jari awal gelombang melingkar, dan  $(a, b)$  menyatakan pusat gelombang melingkar.

#### 4.5.4 Simulasi Syarat Batas Serap

Untuk mendapatkan syarat batas serap 2D, tidak semudah pada 1D, hal ini disebabkan gelombang 2D yang datang pada batas belum tentu memiliki muka gelombang yang sejajar dengan batas. Perhatikan domain komputasi pada gambar 4.5 domain sebenarnya  $[0, Lx] \times [0, Ly]$  diperluas menjadi  $[-c, Lx + c] \times [-c, Ly + c]$ .

Dengan analogi yang serupa pada kasus satu dimensi, jika diinginkan gelombang yang menabrak batas terserap sempurna dan tidak ada bagian dari gelombang yang memantul maka dipasang sepon pada batas. Untuk memodelkan peredaman gelombang di daerah sepon, maka digunakan persamaan air dangkal linier 2D dengan faktor redaman

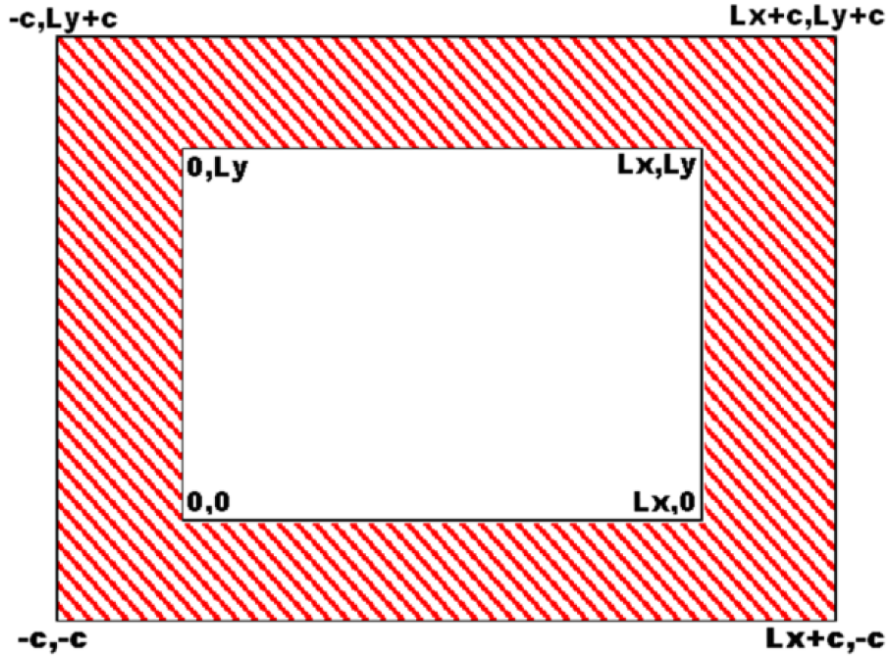


Figure 4.8: Ilustrasi syarat batas serap 2D

berikut

$$\frac{\partial h}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} + kh = 0 \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} + hu = 0 \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial y} + kv = 0 \quad (4.69)$$

Untuk menguji syarat batas serap yang telah diformulasikan maka dilakukan simulasi dengan data: ukuran domain sebenarnya  $[0, Lx] \times [0, Ly]$  dimana  $Lx = Ly = 24$ , lebar selang  $\Delta x = \Delta y = 0.2$ , percepatan gravitasi ( $g = 10$ ), kedalaman dasar air ( $b = 10$ ), konstanta redaman ( $k = 0.9$ ), lebar sepon ( $c = 16$ ), dan ukuran time step

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\sqrt{2gb}}.$$

Simulasi syarat batas serap untuk persamaan air dangkal linier 2D yang didiskritisasi menggunakan metode Godunov dengan syarat awal berupa plane wave yang amplitudonya sama dengan satu dan sinar gelombangnya sejajar dengan sumbu- $x$ , seperti terlihat pada Gambar 4.6 bagian (a), kemudian bagian (b) menunjukkan gelombang awal telah terpecah menjadi dua gelombang, yang satu bergerak ke kanan dan yang lain bergerak ke kiri, selanjutnya bagian (c) memperlihatkan gelombang yang mulai terserap pada batas, dan akhirnya bagian (d) menunjukkan bahwa gelombang sudah terserap sempurna. Simulasi dengan metode Lax juga memberikan hasil yang sama.



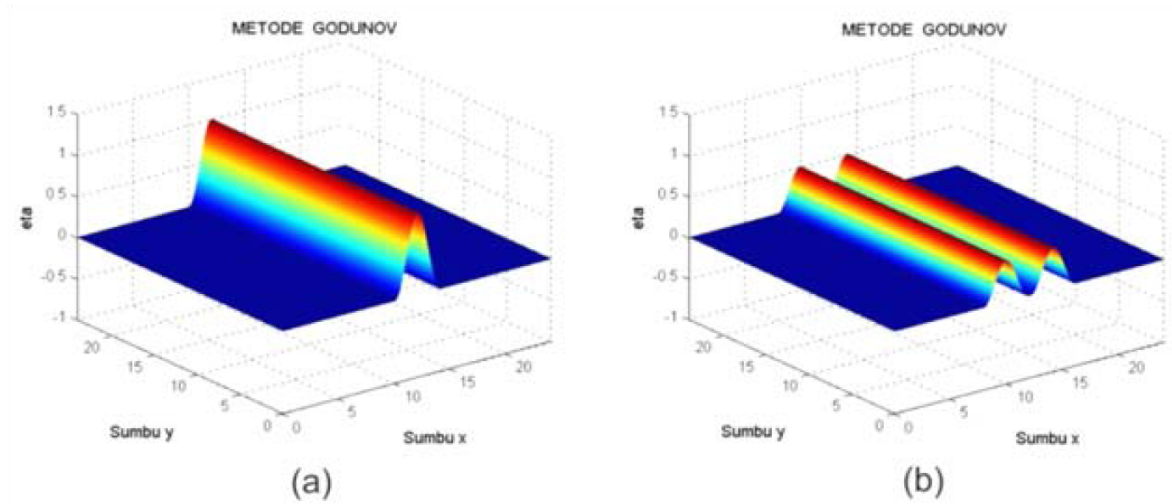


Figure 4.9: Plane wave  $h(x, y, t)$  dengan  $\theta$  untuk (a)  $t = 0$  s (b)  $t = 0.16$  s

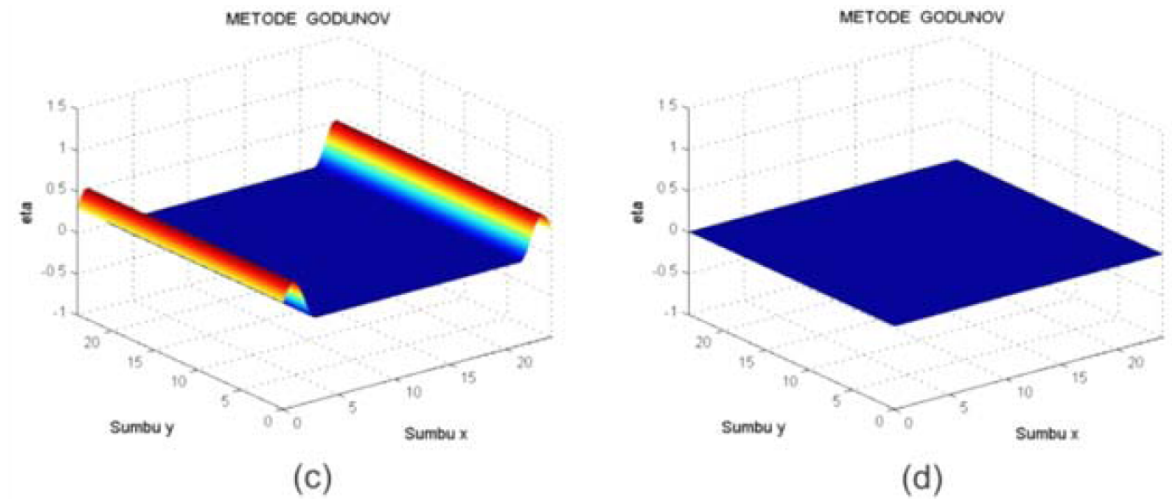


Figure 4.10: Plane wave  $h(x, y, t)$  dengan  $\theta$  untuk (c)  $t = 0.84$  s (d)  $t = 1$  s

Simulasi syarat batas serap untuk persamaan air dangkal linier 2D yang didiskritisasi menggunakan metode Lax maupun Godunov dengan syarat awal berupa plane wave yang amplitudonya sama dengan satu dan sinar gelombangny membentuk sudut  $\theta =$

Gambar 3.8 : Circular w

$\pi/4$  dengan sumbu- $x$ , memberikan hasil seperti yang terlihat pada Gambar 4.11.

(a)  $t = 0$ , (b)  $t = 0.23$  s, (c)

Selanjutnya simulasi syarat batas serap untuk persamaan air dangkal linier 2D yang didiskritisasi menggunakan metode Godunov maupun metode Lax dengan syarat awal berupa circular wave yang amplitudonya sama dengan satu, dengan jari-jari awal ( $R_0 = 4$ ), seperti terlihat pada gambar 4.13 bagian (a), kemudian bagian (b) menunjukkan gelombang awal telah memancar secara radial, selanjutnya bagian (c) memperlihatkan gelombang yang mulai terserap pada batas, bagian (d) menunjukkan gelombang sudah terserap sempurna.

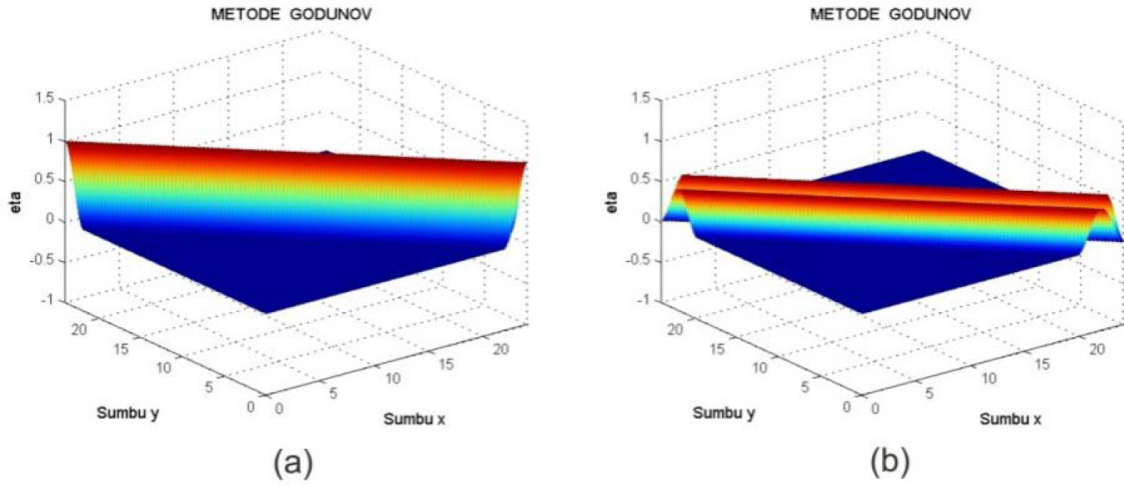


Figure 4.11: Plane wave  $h(x, y, t)$  dengan  $\theta = \pi/4$  untuk (a)  $t = 0 s$ , (b)  $t = 0.16 s$

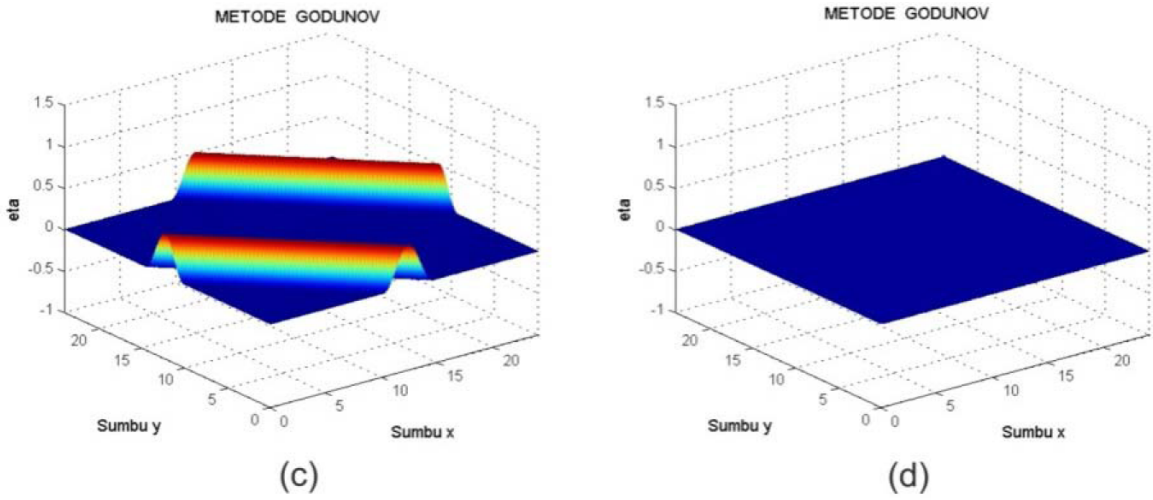


Figure 4.12: Plane wave  $h(x, y, t)$  dengan  $\theta = \pi/4$  untuk (c)  $t = 0.79 s$ , (d)  $t = 1 s$

#### 4.5.5 Pengamatan Hasil Simulasi

Koefisien pantul adalah perbandingan antara amplitudo gelombang pantul dengan amplitudo gelombang mula-mula, yang dapat dituliskan sebagai

$$R = \frac{A}{A_0} \quad (4.70)$$

dengan  $R$  menyatakan koefisien pantul,  $A_0$  menyatakan amplitudo gelombang mula-mula, dan  $A$  menyatakan amplitudo gelombang pantul.

Nilai koefisien pantul dari simulasi syarat batas serap untuk persamaan air dangkal linier 2D dapat dilihat pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2 berikut ini.

Dari Tabel 4.1 terlihat bahwa untuk gelombang yang memiliki muka gelombang yang sejajar dengan batas yaitu  $\phi = 0$  dan  $\phi = \frac{\pi}{2}$  akan terserap sempurna ( $R = 0$ ). Untuk

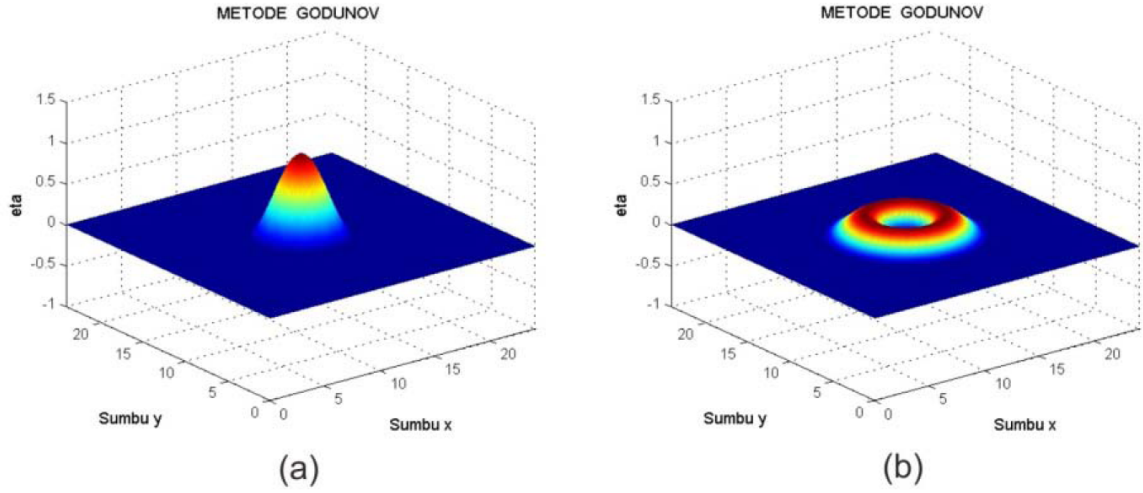


Figure 4.13: Circular wave  $h(x, y, t)$  untuk (a)  $t = 0 s$ , (b)  $t = 0.23 s$

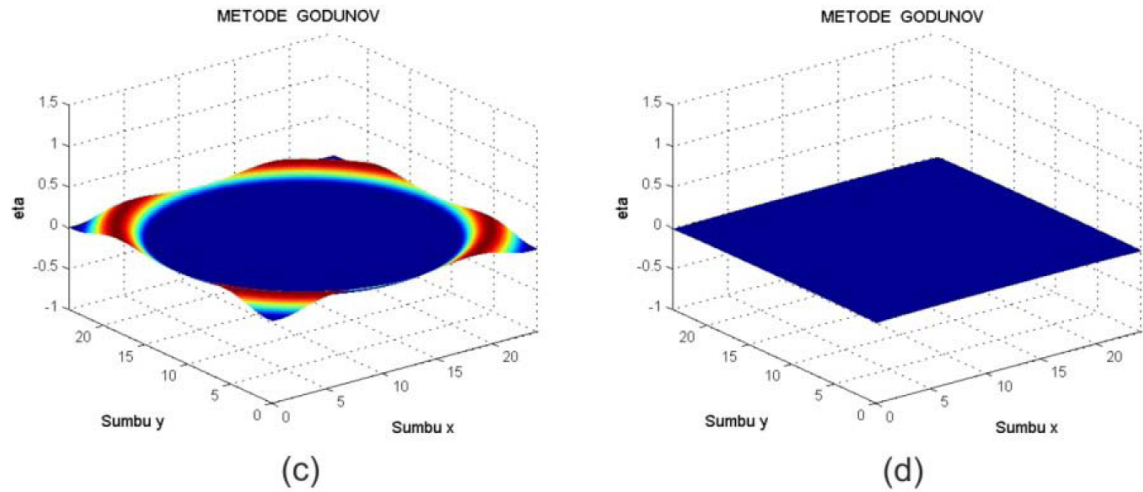


Figure 4.14: Circular wave  $h(x, y, t)$  untuk (c)  $t = 1.26 s$ , (d)  $t = 2.2 s$

plane wave, simulasi dengan metode Lax dan metode Godunov mendapatkan nilai koefisien pantul yang hampir sama.

Dari Tabel 4.2 terlihat bahwa untuk circular wave, simulasi dengan metode Godunov mendapatkan nilai koefisien pantul yang lebih baik daripada metode Lax.

Untuk konstanta redaman tertentu ( $0 < k \leq 0.9$ ) terdapat lebar lapisan sepon minimal agar mendapatkan nilai koefisien pantul seperti pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2. Hubungan antara konstanta redaman dengan lebar lapisan sepon minimal dapat dilihat pada Tabel

Dari Tabel 4.3 terlihat bahwa lebar sepon berbanding terbalik dengan konstanta redaman yang digunakan, sehingga untuk konstanta redaman yang lebih kecil dibutuhkan lapisan sepon yang lebih besar.

Table 4.1: Koefisien pantul  $R$  untuk plane wave

$\theta$	Metode Lax	Metode Godunov
0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	0.0028	0.0024
$\frac{\pi}{4}$	0.0029	0.0019
$\frac{\pi}{3}$	0.0028	0.0024
$\frac{\pi}{2}$	0	0

Table 4.2: Koefisien pantul  $R$  untuk circular wave

Metode Lax	Metode Godunov
0.0075	0.0029

## 4.6 Aplikasi pada Tsunami

Persamaan air dangkal linier yang diturunkan pada subbab sebelumnya

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\eta\sqrt{g}) = \nabla [gh \cdot \nabla (\eta\sqrt{g})], \quad (4.71)$$

merupakan model yang sangat baik untuk mensimulasikan perambatan Tsunami pada lautan lepas pantai, yang sangat jauh dari daratan. Meskipun kedalaman rata-rata lautan lepas  $\pm 4$  km, tetapi panjang gelombang dari Tsunami lebih dari 100 km.

persamaan (4.71) menunjukkan bahwa kecepatan sesaat dari perambatan Tsunami, dalam berbagai arah adalah

$$c_p = c_g = \sqrt{gh(x, y)}, \quad (4.72)$$

dengan tanpa adanya dispersi.

Di dekat daratan atau di sekitar pantai, panjang gelombang Tsunami akan terus berubah menjadi lebih pendek, dan sebaliknya ketinggian permukaannya akan semakin meninggi, sedemikian hingga model linier tidak dapat digunakan lagi. Model nonlinier persamaan air dangkal menjadi hiperbolik, model tersebut dapat dipakai untuk mensimulasikan perpecahan gelombang di perairan sekitar pantai.

Table 4.3: Lebar lapisan sepon minimal untuk beberapa nilai konstanta redaman

Konstanta redaman	Lebar lapisan sepon minimal
0.1	70
0.3	50
0.5	36
0.7	24
0.9	16

## 4.7 Solusi Persamaan Air Dangkal

### 4.7.1 Solusi numerik persamaan gelombang air dangkal

Persamaan kontinuitas dalam bentuk (??), serta persamaan momentum (??) dan (??) inilah yang dikenal sebagai persamaan gelombang air-dangkal atau SWE. Persamaan gelombang air dangkal dapat digunakan untuk memodelkan perambatan gelombang di air atau di fluida yang tak termampatkan lainnya. Persamaan gelombang air dangkal digunakan jika kedalaman fluida cukup kecil jika di dibandingkan dengan panjang gelombangnya. Persamaan-persamaan tersebut adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} (hu) + \frac{\partial}{\partial y} (hv) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) &= -gh \frac{\partial}{\partial x} b \\ \frac{\partial}{\partial t} (hv) + \frac{\partial}{\partial x} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} \left( hv^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) &= -gh \frac{\partial}{\partial y} b\end{aligned}$$

dengan  $h = h(x, y, t)$  adalah ketinggian permukaan air,  $u = u(x, y, t)$  dan  $v = v(x, y, t)$  kecepatan-kecepatan dalam arah horizontal,  $b = b(x, y)$  adalah profile atau struktur dasar saluran, dan  $g$  percepatan gravitas. Sistem persamaan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih kompak sebagai

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \frac{\partial}{\partial x} F(U) + \frac{\partial}{\partial y} G(U) = S_b(U) \quad (4.73)$$

dengan,

$$\begin{aligned}
U &= (h, hu, hv)^T \\
F(U) &= \left( hu, hu^2 + \frac{1}{2}gh^2, huv \right)^T \\
G(U) &= \left( hv, huv, hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)^T \\
S_b &= (0, -ghb_x, -ghb_y)
\end{aligned}$$

Sistem persamaan (4.73) akan kita selesaikan dengan menggunakan metode finite volume.

### 4.7.2 Pengintegralan dan pendiskritan

Gunakan notasi simbolik

$$\mathcal{F}(U) = (F(U), G(U)), \quad (4.74)$$

Sistem persamaan (4.73) dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih sederhana menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t}U + \nabla \cdot \mathcal{F} = S_b, \quad (4.75)$$

dengan  $\nabla$  adalah operator differensial  $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  dan  $\nabla \cdot \mathcal{F}$  adalah *divergence* dari  $\mathcal{F}$ .

Domain komputasi dibagi menjadi sejumlah volume hingga  $C_i$ , dan integral permukaan dihitung untuk setiap volume tersebut, yaitu

$$\int_{C_i} \frac{\partial}{\partial t}U dA + \int_{C_i} \nabla \cdot \mathcal{F} dA = \int_{C_i} S_b dA \quad (4.76)$$

Jika teori divergen diterapkan pada suku yang kedua, yaitu dengan mengubah integral permukaan menjadi integral garis sepanjang  $\Gamma_i$ , maka diperoleh

$$\int_{C_i} \frac{\partial}{\partial t}U dA + \int_{\Gamma_i} \mathcal{F} \cdot \eta dl = \int_{C_i} S_b dA \quad (4.77)$$

Jika suku yang kedua dipindah ke ruas kanan akan diperoleh

$$\int_{C_i} \frac{\partial}{\partial t}U dA = \int_{\Gamma_i} \mathcal{F} \cdot (-\eta) dl + \int_{C_i} S_b dA \quad (4.78)$$

### 4.7.3 Pendiskritan turunan terhadap waktu

Solusi dari persamaan (4.78) di hampiri dengan sejumlah titik diskrit  $U_i^n$ , konstan pada setiap cell  $C_i$  dan waktu  $t_n$ , Turunan terhadap waktu didiskritkan menggunakan beda maju

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} U \right|_{C_i, t_n} \approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t}$$

sehingga persamaan (4.77) menjadi

$$\int_{C_i} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} dA + \int_{\Gamma_i} \mathcal{F} \cdot \eta dl = \int_{C_i} S_b dA \quad (4.79)$$

Pada suku pertama,  $U_i^{n+1}, U_i^n$  dan  $\Delta t$  bernilai konstan dalam setiap cell, sehingga integralnya dapat dituliskan menjadi

$$\int_{C_i} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} dA = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} A_i \quad (4.80)$$

Suku kedua dari persamaan (4.79), integral garis tersebut di pecah menjadi jumlah dari integral-integral sepanjang setiap sisi  $\Gamma_{ij}$ ,  $j \in \mathcal{K}_i$

$$\int_{\Gamma_i} \mathcal{F} \cdot \eta dl = \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{F} \cdot \eta dl \quad (4.81)$$

Integral permukaan dari suku eksternal di pecah menjadi jumlah dari integral-integral sepanjang subcell  $T_{ij}$ ,  $j \in \mathcal{K}_i$

$$\int_{C_i} S_b dA = \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{T_{ij}} S_b dA \quad (4.82)$$

sehingga (4.79) menjadi

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} A_i + \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{F} \cdot \eta dl = \sum_{j \in \mathcal{K}_i} \int_{T_{ij}} S_b dA \quad (4.83)$$

### 4.7.4 Simulasi 1

Berikut ini di sajikan hasil simulasi untuk  $t = 1$ ,  $t = 2.5$ ,  $t = 5$ , dan  $t = 10$ , Lihat gambar 4.15, 4.16, 4.17, dan 4.18.

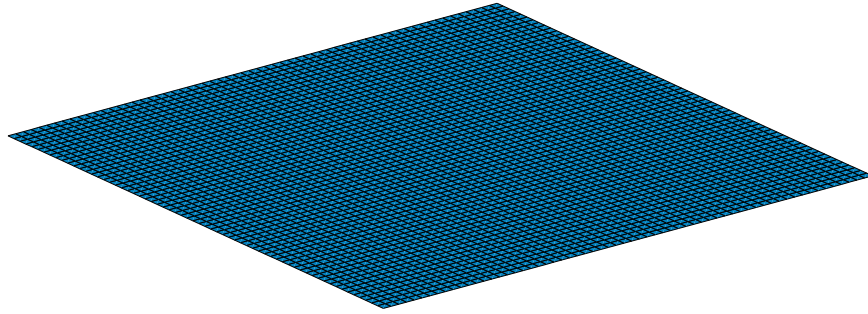


Figure 4.15: Hasil simulasi pada saat  $t = 1$

#### 4.7.5 Simulasi 2

Pada simulasi 2, hasil pada gambar 4.19 dan 4.20 merupakan profile permukaan gelombang yang diperoleh dengan menyelesaikan persamaan SWE (4.71).



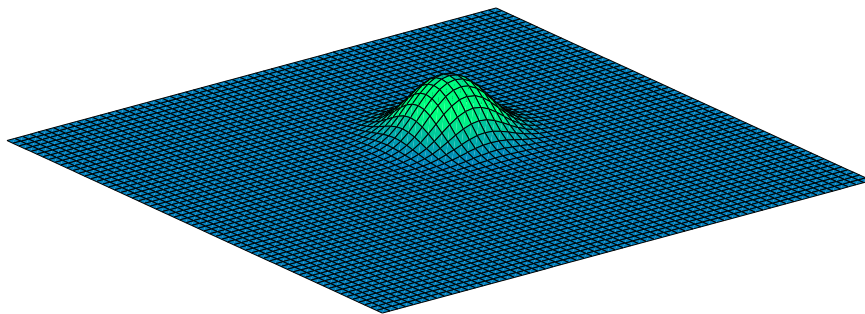


Figure 4.16: Hasil Simulasi pada saat  $t = 2.5$

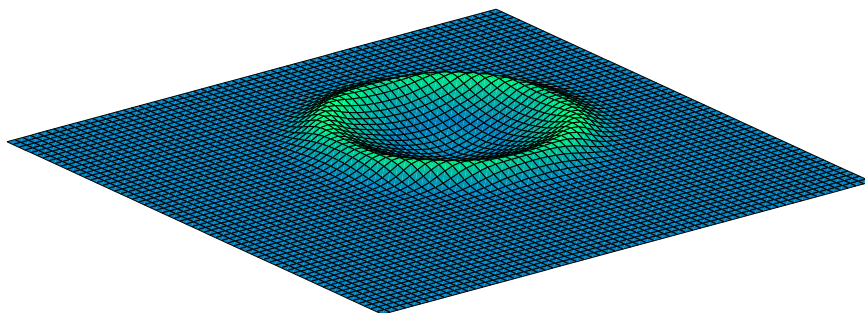


Figure 4.17: Hasil simulasi pada saat  $t = 5$

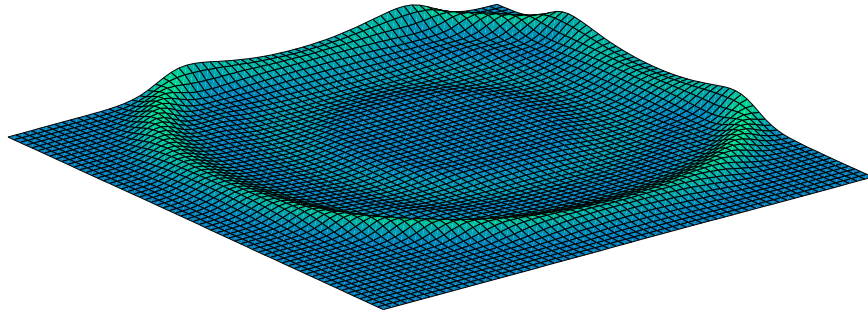


Figure 4.18: Hasil simulasi pada saat  $t = 10$

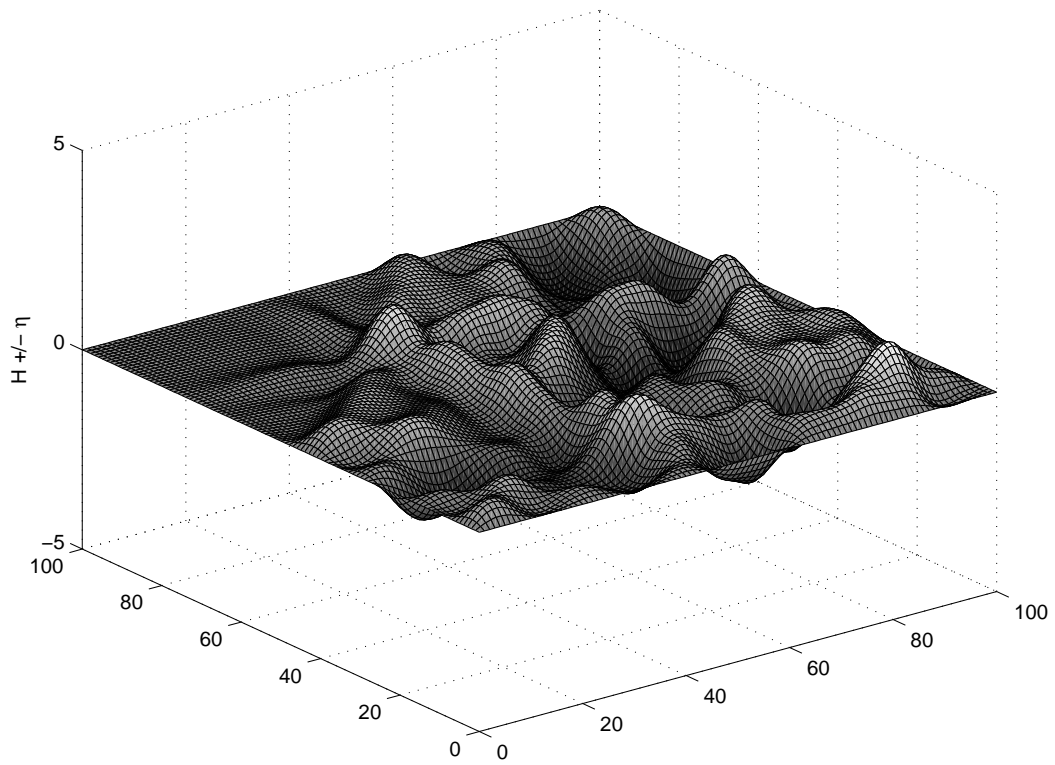


Figure 4.19: Solusi numerik SWE linier 2D

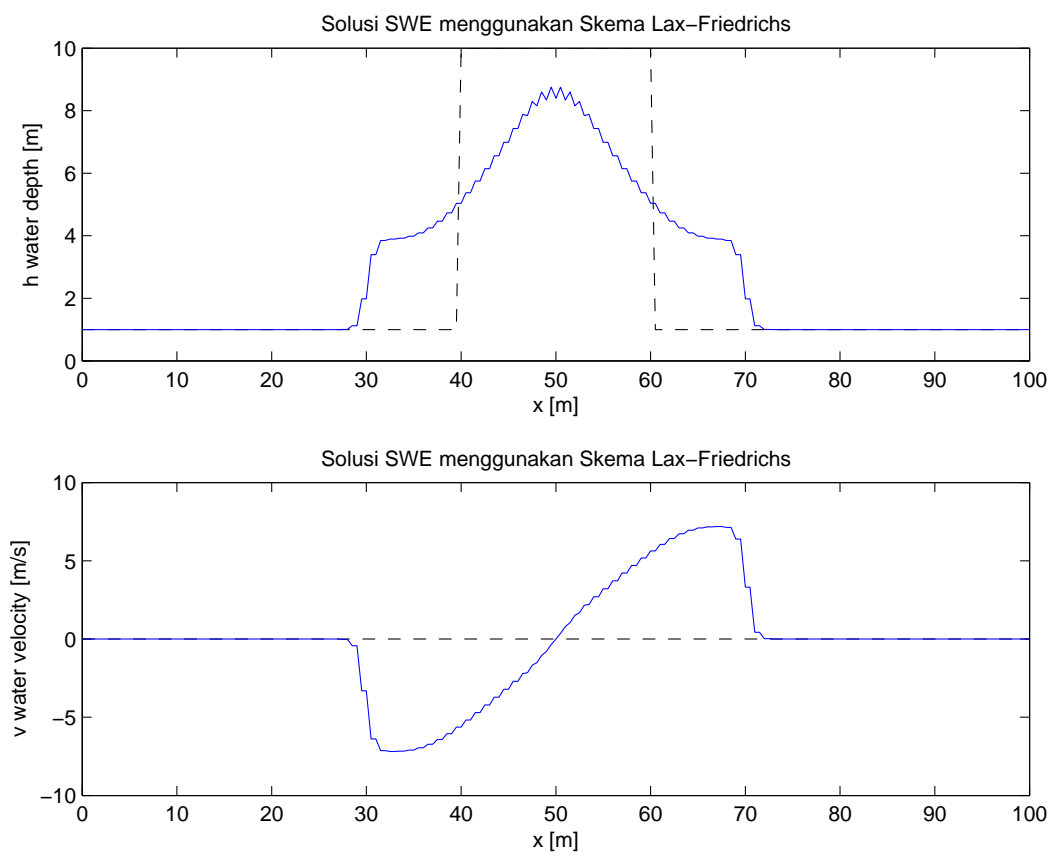


Figure 4.20: Simulasi SWE dalam 1D

# BAB V

## Penutup

### 5.1 Kesimpulan

Dalam penurunan persamaan gelombang air-dangkal (SWE), digunakan persamaan kontinuitas dan persamaan momentum dengan mengabaikan variasi kecepatan vertikal fungsi potensial  $w$ . Model yang dihasilkan berupa tiga buah sistem persamaan differensial nonlinier dimensi-2 (2D).

Untuk perambatan Tsunami di tengah lautan yang jauh dari pantai, kita dapat mereduksi model SWE yang diperoleh ke dalam bentuk yang linier. Jika pengamatan dilakukan dari satu arah, maka model SWE tersebut dapat di reduksi lagi kedalam bentuk 1D.

Untuk perambatan Tsunami yang dekat pantai, maka harus dipertimbangkan perubahan kedalaman dasar perairannya. Karena secara default semakin dekat ke pantai, kedalaman dasar perairannya akan semakin berkurang. Hal ini akan menimbulkan efek peninggian terhadap permukaan gelombang. Di samping itu di sekitar pantai, akan terjadi pemantulan gelombang yang disebabkan oleh adanya tabrakan sebagian gelombang yang sampai ke dinding atau tepi pantai terlebih dahulu. Dan karena bentuk dari tepian pantai tidak linier atau sebagian besar tidak beraturan, maka harus dipertimbangkan pula efek penyebaran gelombang.

Untuk mengamati bagaimana gelombang menyebar menuju ke pantai dan bagaimana perambatannya, dilakukan simulasi dengan menyelesaikan model SWE yang diperoleh dengan menggunakan metode Volume Hingga. Proses pendiskritan dengan metode volume hingga dilakukan dengan cara mengintegalkkan persamaan diferensial terhadap semua variabel yang berpengaruh dan menghampiri persamaan integral dengan menggunakan definisi dari fluks.

Dengan menggunakan metode volume hingga ini, kita dapat menyelesaikan model SWE baik yang linier maupun nonlinier dengan skema eksplisit, yang mana komputasi yang diperlukan jauh lebih efisien dibandingkan dengan skema yang implisit. Metode

## 5.2 Saran

Pada penelitian ini, model SWE diselesaikan dengan menggunakan kondisi batas Dirichlet, dengan memisalkan ketinggian permukaan air di batas selalu sama dengan nol. Untuk penelitian selanjutnya, akan digunakan pendekatan Riemann untuk mengatur kondisi pada batas yang sesuai dengan kondisi yang terjadi pada batas sesungguhnya.

# Bibliography

- [1] Francisco Alcrudo and Pilar Garcia Navarro. A high resolution Godunov type scheme in finite volumes for the 2D shallow water equations. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 16(6):489–505, 1993.
- [2] Frederick E Camfield. Tsunami Engineering. Technical report, 1980.
- [3] Vincenzo Casulli. Semi-implicit finite difference methods for the two-dimensional shallow water equations. *J. Comput. Phys.*, 86(1):56–74, 1990.
- [4] Adrian Constantin and Joachim Escher. Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations. *Acta Math.*, 181(2):229–243, 1998.
- [5] Philip G Drazin and Robin S Johnson. *Solitons: an introduction*, volume 2. Cambridge university press, 1989.
- [6] Paul Glaister. Approximate Riemann solutions of the shallow water equations. *J. Hydraul. Res.*, 26(3):293–306, 1988.
- [7] Leo H Holthuijsen. *Waves in oceanic and coastal waters*. Cambridge University Press, 2007.
- [8] R L Kolar, W G Gray, J J Westerink, and R A Luetlich Jr. Shallow water modeling in spherical coordinates: Equation formulation, numerical implementation, and application. *J. Hydraul. Res.*, 32(1):3–24, 1994.
- [9] Christian Kuhbacher. Shallow Water Derivation and Applications, 2009.
- [10] PHILIP L-F Liu. Model equations for wave propagations from deep to shallow water. *Adv. Coast. Ocean Eng.*, 1:125–158, 1994.
- [11] Fabien Marche. Derivation of a new two-dimensional viscous shallow water model with varying topography, bottom friction and capillary effects. *Eur. J. Mech.*, 26(1):49–63, 2007.

- [12] Junbo Park. Numerical Simulation of Wave Propagation Using the Shallow Water Equations. 2007.
- [13] Kenji Satake. Case Studies and Recent Developments. 2005.

# Lampiran-1:

## *Log-Book* Kegiatan Penelitian

No	Hari, dan Tanggal	Tempat	Uraian Tugas	Tanda Tangan
1.	5 Juni 2014	Lab. Komputer	Menurunkan persamaan kontinuitas	
2.	12 Juni 2014	Lab. Komputer	Menurunkan persamaan momentum	
3.	19 Juni 2014	Lab. Komputer	Menurunkan persamaan Bernoulli	
4.	3 Juli 2014	Lab. Komputer	Menentukan kondisi batas kinematik dan dinamik	
5.	17 Juli 2014	Lab. Komputer	Menurunkan persamaan air-dangkal (SWE) 2D nonlinier	
6.	7 Agustus 2014	Lab. Komputer	Mereduksi SWE 2D ke dalam bentuk yang linier	
7.	21 Agustus 2014	Lab. Komputer	Mereduksi SWE ke dalam ruang 1D	
8.	28 Agustus 2014	Lab. Komputer	Membuat prosedur penyelesaian SWE menggunakan metode volume hingga (FVM)	



No	Hari, dan Tanggal	Tempat	Uraian Tugas	Tanda Tangan
9.	11 September 2014	Lab. Komputer	Diskretisasi SWE 2D linier menggunakan FVM	
10.	18 September 2014	Lab. Komputer	Diskretisasi SWE 2D nonlinier menggunakan FVM	
11.	25 September 2014	Lab. Komputer	Analisis konvergensi pada model diskrit dari SWE	
12.	2 Oktober 2014	Lab. Komputer	Membuat program simulasi untuk SWE yang linier	
13.	16 Oktober 2014	Lab. Komputer	Membuat program simulasi untuk SWE nonlinier	
14.	23 Oktober 2014	Lab. Komputer	Menulis Laporan	

Malang, 31 Oktober 2014

Mengetahui,  
Kepala Lab. Komputer Dasar

Ari Kusumastuti, M.Pd  
NIP. 19770521 200501 2 004

## Lampiran-2:

# Kode Program

```
function solusi_SWE
n = 64;
g = 9.8;
dt = 0.01;
dx = 1.0;
dy = 1.0;
nplotstep = 8;
ndrops = 1;
dropstep = 200;
D = droplet(1.5,21);
[surfplot ,top ,restart ,quit] = initgraphics(n);
while get(quit , 'value') == 0
    set(restart , 'value' ,0)
    H = ones(n+2,n+2);
    U = zeros(n+2,n+2);
    V = zeros(n+2,n+2);
    Hx = zeros(n+1,n+1);
    Ux = zeros(n+1,n+1);
    Vx = zeros(n+1,n+1);
    Hy = zeros(n+1,n+1);
    Uy = zeros(n+1,n+1);
    Vy = zeros(n+1,n+1);
    ndrop = ceil(rand*ndrops);
    nstep = 0;

    while get(restart , 'value')==0 && get(quit , 'value')==0
        nstep = nstep + 1;
        if mod(nstep , dropstep) == 0 && nstep <= ndrop*dropstep
            w = size(D,1);
```

```

    i = ceil(rand*(n-w))+(1:w);
    j = ceil(rand*(n-w))+(1:w);
    H(i,j) = H(i,j) + (1+4*rand)/5*D;
end
H(:,1) = H(:,2);
U(:,1) = U(:,2);
V(:,1) = -V(:,2);
H(:,n+2) = H(:,n+1);
U(:,n+2) = U(:,n+1);
V(:,n+2) = -V(:,n+1);
H(1,:) = H(2,:);
U(1,:) = -U(2,:);
V(1,:) = V(2,:);
H(n+2,:) = H(n+1,:);
U(n+2,:) = -U(n+1,:);
V(n+2,:) = V(n+1,:);

i = 1:n+1;
j = 1:n;
Hx(i,j) = (H(i+1,j+1)+H(i,j+1))/2 - dt/(2*dx)*(U(i+1,j+1)-U(i,j+1));
Ux(i,j) = (U(i+1,j+1)+U(i,j+1))/2 - dt/(2*dx)*((U(i+1,j+1).^2./H(i+1,j+1) + g/2*H(i+1,j+1).^2) - U(i,j+1).^2./H(i,j+1) + g/2*H(i,j+1).^2));
Vx(i,j) = (V(i+1,j+1)+V(i,j+1))/2 - dt/(2*dx)*((U(i+1,j+1).*V(i+1,j+1)./H(i+1,j+1)) - (U(i,j+1).*V(i,j+1)./H(i,j+1)));
i = 1:n;
j = 1:n+1;
Hy(i,j) = (H(i+1,j+1)+H(i+1,j))/2 - dt/(2*dy)*(V(i+1,j+1)-V(i+1,j));
Uy(i,j) = (U(i+1,j+1)+U(i+1,j))/2 - dt/(2*dy)*((V(i+1,j+1).*U(i+1,j+1)./H(i+1,j+1)) - (V(i+1,j).*U(i+1,j)./H(i+1,j)));
Vy(i,j) = (V(i+1,j+1)+V(i+1,j))/2 - dt/(2*dy)*((V(i+1,j+1).^2./H(i+1,j+1) + g/2*H(i+1,j+1).^2) - V(i+1,j).^2./H(i+1,j) + g/2*H(i+1,j).^2));
i = 2:n+1;
j = 2:n+1;
H(i,j) = H(i,j) - (dt/dx)*(Ux(i,j-1)-Ux(i-1,j-1)) - (dt/dy)*(Vy(i-1,j)-Vy(i-1,j-1));
U(i,j) = U(i,j) - (dt/dx)*((Ux(i,j-1).^2./Hx(i,j-1) + g/2*Hx(i,j-1).^2) - (Ux(i-1,j-1).^2./Hx(i-1,j-1) + g/2*Hx(i-1,j-1).^2));

```

```

-1).^2))- (dt/dy)*((Vy(i-1,j).*Uy(i-1,j)./Hy(i-1,j)) - (Vy
(i-1,j-1).*Uy(i-1,j-1)./Hy(i-1,j-1)));
V(i,j) = V(i,j) - (dt/dx)*((Ux(i,j-1).*Vx(i,j-1)./Hx(i,j-1))
- (Ux(i-1,j-1).*Vx(i-1,j-1)./Hx(i-1,j-1))) - (dt/dy)*((Vy(
i-1,j).^2./Hy(i-1,j) + g/2*Hy(i-1,j).^2) - (Vy(i-1,j-1)
.^2./Hy(i-1,j-1) + g/2*Hy(i-1,j-1).^2));
if mod(nstep,nplotstep) == 0
    C = abs(U(i,j)) + abs(V(i,j));
    t = nstep*dt;
    tv = norm(C,'fro');
    set(surfplot,'zdata',H(i,j),'cdata',C);
    set(top,'string',sprintf('t=%6.2f, tv=%6.2f',t,tv))
    drawnow
end
if all(all(isnan(H))), break, end
end
end

close(gcf)

function D = droplet(height,width)
    [x,y] = ndgrid(-1:(2/(width-1)):1);
    D = height*exp(-5*(x.^2+y.^2));

function [surfplot,top,restart,quit] = initgraphics(n);
    clf
    shg
    set(gcf,'numbertitle','off','name','Shallow_water')
    x = (0:n-1)/(n-1);
    surfplot = surf(x,x,ones(n,n),zeros(n,n));
    grid off
    axis([0 1 0 1 -1 3])
    caxis([-1 1])
    shading faceted
    c = (1:64)/64;
    cyan = [0*c c c];
    colormap(cyan)
    top = title('xxx');
    restart = uicontrol('position',[20 20 80 20],'style','toggle','
        string','restart');

```

```
quit = uicontrol( 'position',[120 20 80 20], 'style','toggle','  
    string','close');
```